Devoir surveillé 8

samedi 15 juin 2013

La calculatrice est interdite. Pour tout le sujet, on fixe un entier $N \in \mathbf{N}^*$.

On pourra utiliser, pour toute fonction $f \in C^0([0,1], \mathbf{K})$, la tendance $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f$.

Exercice 1 (un équivalent d'une intégrale). Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on note $J_n := \int_0^1 (\ln(1+t))^n \, dt$.

1. *Montrer l'égalité* $J_N = \int_1^2 (\ln x)^N \, dx$.
2. *Montrer l'égalité* $NJ_{N-1} = 2(\ln 2)^N - J_N$.
3. *Montrer la comparaison* $J_N = o_{N\to\infty}\left((\ln 2)^N\right)$.
4. *Donner deux réels* A *et* B *tels que* $J_N \overset{N\to\infty}{\sim} \frac{A}{N} B^N$.

Exercice 2 (moyenne géométrique). Soient $\begin{cases} (a_1, a_2, ..., a_N) \in \mathbf{R}_+^N \\ (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N) \in [0,1]^N \end{cases}$ tels que $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$.

1. *Effectuer un développement limité à l'ordre 1 de* $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i a_i^t$ *lorsque* $t \to 0$.
2. *En déduire un développement limité à l'ordre 0 de* $\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i a_i^t\right)^{\frac{1}{t}}$ *lorsque* $t \to 0$.
3. *Conclure à la tendance* $\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i a_i^t\right)^{\frac{1}{t}} \overset{t\to 0}{\longrightarrow} \prod_{i=1}^{N} a_i^{\lambda_i}$.

Exercice 3 (étude de limites doubles). On définit une application $S : \begin{cases} \mathbf{N}^{*2} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\sum_{i=1}^{x} \frac{1}{x} \sqrt[y]{1+\frac{i}{x}}\right)^y \end{cases}$.

On souhaite étudiuer les "double-limites" $\lim_{a\to\infty} \lim_{b\to\infty} S(a,b)$ et $\lim_{b\to\infty} \lim_{a\to\infty} S(a,b)$.

1. Soit $a \in \mathbf{N}^*$.
   (a) *Montrer la tendance* $S(a,b) \overset{b\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt[a]{\prod_{i=1}^{a}\left(1+\frac{i}{a}\right)}$. (On pourra utiliser l'exercice précédent.)
   (b) *Montrer la tendance* $\ln \sqrt[a]{\prod_{i=1}^{a}\left(1+\frac{i}{a}\right)} \overset{a\to\infty}{\longrightarrow} \int_1^2 \ln$.
   (c) *En déduire que le réel* $\lim_{a\to\infty} \lim_{b\to\infty} S(a,b)$ *fait sens et vaut* $\frac{4}{e}$.
2. Soit $b \in \mathbf{N}^*$.
   (a) *Montrer la tendance* $S(a,b) \overset{a\to\infty}{\longrightarrow} \left(\int_1^2 \sqrt[n]{t} dt\right)^b$.
   (b) *À l'aide d'un développement limité, montrer que la suite* $\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)$ *converge et donner sa limite.*
   (c) *Effectuer un développement limité à l'ordre 1 de* $2\sqrt[n]{2} - 1$ *lorsque* $n \to \infty$.
   (d) *En déduire un développement limité à l'ordre 0 de* $\left(2\sqrt[n]{2}-1\right)^n$ *lorsque* $n \to \infty$.
   (e) *Conclure que le réel* $\lim_{b\to\infty} \lim_{a\to\infty} S(a,b)$ *fait sens et vaut* $\frac{4}{e}$.
3. *Donner une application* $s : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{R}$ *telle que les deux réels* $\lim_{a\to\infty} \lim_{b\to\infty} s(a,b)$ *et* $\lim_{b\to\infty} \lim_{a\to\infty} S(a,b)$ *font sens et diffèrent.*

Exercice 0 (cadeaux).

1. *Donner sens à et calculer les intégrales suivantes :*
   (a) $\int_1^e \ln$ *;*
   (b) $\int_0^{2\pi} e^{42\theta i} d\theta$ *;*
   (c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin}{\cos^3}$ *;*
   (d) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ *;*
   (e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2r} \cos r \; dr$ *;*
   (f) $\int_{-2}^0 \frac{dt}{t^2+t+1}$ *;*
   (g) $\int_0^{\frac{45}{8}} \frac{dz}{\sqrt{9+z^2}}$.
2. *Soient $n \in \mathbf{N}$ et f une fonction de classe C^n au voisinage de 0. Donner (sans démonstration) le développement limité de f à l'ordre n au voisinage de 0.*
3. *Montrer l'existence et expliciter les développements limités suivants à l'ordre 5 au voisinage de 0 :*
   (a) $\exp$ *;*
   (b) $\sin$ *;*
   (c) $t \mapsto \sqrt{1-t}$ *;*
   (d) $a \mapsto -\ln(1-a)$ *;*
   (e) $\arcsin$ *;*
   (f) argth *;*
   (g) $\tan$.