Devoir surveillé 7

samedi 18 mai 2013

Solution proposée. Le barème est sur **50 points**. Pour obtenir votre note sur 20, appliquer sur votre nombre de points sur 50 l'unique fonction polynomiale de degré 2 qui vaut 0 en 0 et qui prend sa valeur maximale 19 en 19.

Cadeaux. (12pts) Voir le cours sur les polynômes **(2pts + 2pts + 3pts +3pts)** et les travaux guidés sur les matrices **(2pts)**.

Exercice 1. (16pts)

1. **(2pts + 2pts + 4pts)**

(a) Les applications f et g sont bien définies de $\mathbf{R}^3$ vers $\mathbf{R}^3$. Il reste à montrer leur linéarité.

Celle de f provient de ce que le produit vectoriel est bilinéaire.

Le produit scalaire étant bilinéaire, l'application $x \mapsto (v \cdot x)$ est linéaire. La multiplication d'un vecteur par un scalaire étant bilinéaire, l'application $\lambda \mapsto \lambda v$ est linéaire. La composée des deux (qui vaut g) est donc linéaire.

(b) On a les égalités

$$\begin{aligned}
f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ \\ c \\ -b \end{pmatrix}, \\
f\left(\begin{pmatrix} \circ \\ 1 \\ \circ \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \circ \\ 1 \\ \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ \circ \\ a \end{pmatrix}, \\
f\left(\begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ \circ \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ce qui montre que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} \circ & -c & b \\ c & \circ & -a \\ -b & a & \circ \end{pmatrix}$.

On a les égalités

$$\begin{aligned}
g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix}\right) &= \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix}\right) v = a \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 \\ ab \\ ac \end{pmatrix}, \\
g\left(\begin{pmatrix} \circ \\ 1 \\ \circ \end{pmatrix}\right) &= \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \circ \\ 1 \\ \circ \end{pmatrix}\right) v = b \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab \\ b^2 \\ bc \end{pmatrix}, \\
g\left(\begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ 1 \end{pmatrix}\right) v = c \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac \\ ab \\ c^2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ce qui montre que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$.

(c) On a d'une part l'égalité

$$(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f)^2 = \begin{pmatrix} \circ & -c & b \\ c & \circ & -a \\ -b & a & \circ \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -b^2-c^2 & ab & ac \\ ab & -a^2-c^2 & bc \\ ac & bc & -a^2-b^2 \end{pmatrix},$$

d'autre part l'égalité

$$\begin{aligned}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} g) - \|v\|^2 I_3 &= \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & \circ & \circ \\ \circ & a^2+b^2+c^2 & \circ \\ \circ & \circ & a^2+b^2+c^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -b^2-c^2 & ab & ac \\ ab & -a^2-c^2 & bc \\ ac & bc & -a^2-b^2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

ce qui montre l'égalité $(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f)^2 = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} g) - \|v\|^2 I_3$.

Cela était prévisible. En effet, on a pour tout $x \in \mathbf{R}^3$ les égalités

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f(f(x)) \\ &= v \times (v \times x) \\ &= (v \cdot x)\, v - (v \cdot v)\, x \\ &= g(x) - \|v\|^2 x \\ &= \left[g - \|v\|^2 \mathrm{Id}\right](x), \end{aligned}$$

ce qui revient à l'égalité $f^2 = g - \|v\|^2 \mathrm{Id}$, d'où l'on tire

$$\begin{aligned} (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} g) - \|v\|^2 I_3 &= (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} g) - \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\|v\|^2 \mathrm{Id}\right) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(g - \|v\|^2 \mathrm{Id}\right) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^2\right) \\ &= (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f)^2. \end{aligned}$$

2. **(3pts + 2pts + 3pts)**

(a) Posons $R =: \begin{pmatrix} a & \alpha & A \\ b & \beta & B \\ c & \gamma & C \end{pmatrix}$ et notons U, V, W les colonnes de R. On a alors l'égalité

$$\begin{aligned} {}^tRR &= \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ A & B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \alpha & A \\ b & \beta & B \\ c & \gamma & C \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & a\alpha+b\beta+c\gamma & Aa+Bb+Cc \\ a\alpha+b\beta+c\gamma & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 & A\alpha+B\beta+C\gamma \\ Aa+Bb+Cc & A\alpha+B\beta+C\gamma & A^2+B^2+C^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U\cdot U & U\cdot V & U\cdot W \\ V\cdot U & V\cdot V & V\cdot W \\ W\cdot U & W\cdot V & W\cdot W \end{pmatrix} \\ &\underset{\substack{\text{est une base} \\ \text{orthonormée de } \mathbf{R}^3}}{\overset{\text{car } (U,V,W)}{=}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3. \end{aligned}$$

On en déduit (*cf.* dernier cadeau) que R est inversible d'inverse ${}^tR$, d'où l'égalité $R\,{}^tR = I_3$, *i. e.* ${}^t({}^tR)\ {}^tR = I_3$, laquelle traduit (d'après le calcul ci-dessus) le fait que les colonnes de ${}^tR$ forment une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$, *i. e.* le fait que les lignes de R forment une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$.

(b) L'énoncé demande de montrer que $R - {}^tR$ est anti-symétrique et non nulle. Or on a bien

$$\begin{aligned} {}^t\left(R - {}^tR\right) &= {}^tR - {}^{tt}R \\ &= {}^tR - R \\ &= -\left(R - {}^tR\right) \end{aligned}$$

et la nullité de $R - {}^tR$ équivaudrait à l'égalité ${}^tR = R$, *i. e.* à l'appartenance $R \in S_3(\mathbf{R})$, ce qui n'est pas.

(c) Soit $X \in \mathbf{R}^3$. On a les équivalences

$$\begin{array}{rcl} X \in \operatorname{Ker}\left(R^2 - I_3\right) & \iff & \left(R^2 - I_3\right) X = 0 \\ & \underset{\text{inversible}}{\overset{\text{car } R^{-1} \text{ est}}{\iff}} & R^{-1}\left(R^2 - I_3\right) X = R^{-1}0 \\ & \iff & \left(R - R^{-1}\right) X = 0 \\ & \iff & X \in \operatorname{Ker}\left(R - {}^tR\right) \\ & \iff & X \in \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} \circ & -\gamma & \beta \\ \gamma & \circ & -\alpha \\ -\beta & \alpha & \circ \end{pmatrix} \\ & \underset{\text{question 1b}}{\overset{\text{d'après la}}{\iff}} & X \in \operatorname{Ker}\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ w & \longmapsto & (\alpha, \beta, \gamma) \times w \end{array}\right. \\ & \iff & X \times u = 0 \\ & \overset{\text{car } u \neq 0}{\iff} & X \parallel u \\ & \iff & X \in \operatorname{Vect}\{u\}. \end{array}$$

Exercice 2. (7pts) Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

1. **(1pt)** Montrons que f est bien définie. Soit $P =: \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbf{K}_d[X]$. On a alors les égalités et appartenances

$$f(P) = \sum_{n=0}^{d} a_n (1+X)^n = \sum_{n=0}^{d} a_n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} X^j = \sum_{0 \leq j \leq n \leq d} a_n \binom{n}{j} X^j = \sum_{j=0}^{d} \underbrace{\left(\sum_{n=j}^{d} a_n \binom{n}{j}\right) X^j}_{\in \mathbf{K}_j[X] \subset \mathbf{K}_d[X]} \in \mathbf{K}_d[X].$$

Il est par ailleurs immédiat que f est linéaire (c'est la composition à droite par un élément fixé).

2. **(2pts)** Soit $k \in \{0, 1, ..., d\}$. En replaçant dans le calcul précédent tous les $a_{i \neq k}$ par 0 et a_k par 1, on obtient l'égalité $f\left(X^k\right) = \sum_{j=0}^{d} \binom{k}{j} X^j$. On en déduit que la matrice cherchée est $\left(\binom{k}{j}\right)_{\substack{0 \leq k \leq d \\ 0 \leq j \leq d}}$. (Elle est en particulier triangulaire supérieure.)

3. **(2pts)** L'application f est clairement inversible de réciproque $P \mapsto P(X-1)$. On déduit alors de l'égalité fonctionnelle $f \circ f^{-1} = \operatorname{Id}$ les égalités matricielles $I_{d+1} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} \operatorname{Id} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f \circ f^{-1}\right) = \left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f\right) \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right)$, ce qui montre que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f = \left(\binom{m}{j}\right)_{\substack{0 \leq m \leq d \\ 0 \leq j \leq d}}$ est inversible d'inverse $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right)$.
   En reprenant le calcul de la question 1 en remplaçant $1+X$ par $X-1$, ce qui a pour effet de rajouter un signe $(-1)^{i-j}$ dans la sommande, on obtient

$$\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f\right)^{-1} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right) = \left((-1)^{k-j}\binom{i}{j}\right)_{\substack{0 \leq i \leq d \\ 0 \leq j \leq d}}.$$

4. **(2pts)** L'hypothèse se réécrit $u = Mv$ avec $M := \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f$, d'où l'on tire $v = M^{-1}Mv = M^{-1}u$. Or l'expression de M^{-1} trouvée à la question précédente permet de conclure.

Exercice 3.

1. **(2pts + 2pts + 3pts)**

   (a) Soient $(P, Q) \in \mathbf{I}(A)^2$, $\lambda \in \mathbf{K}$ et $p \in \mathbf{K}[X]$. On a alors

$$\begin{array}{rcl} [\lambda P + Qp](A) & = & \lambda P(A) + Q(A)\, p(A) \\ & = & \lambda 0 + 0 p(A) \\ & = & 0, \\ i.\ e.\ \lambda P + Qp & \in & \mathbf{I}(A),\ c.\ q.\ f.\ d.. \end{array}$$

(b) Notons $M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a les égalités

$$\begin{aligned} (a+d)\,M - (ad-bc)\,I_2 &= (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 \\ &= M^2,\ c.\ q.\ f.\ d.. \end{aligned}$$

(c) Notons $M := \begin{pmatrix} \circ & \circ & \alpha \\ 1 & \circ & \beta \\ \circ & 1 & \gamma \end{pmatrix}$. On a les égalités

$$\begin{aligned} M^2 &= \begin{pmatrix} \circ & \circ & \alpha \\ 1 & \circ & \beta \\ \circ & 1 & \gamma \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \circ & \alpha & \alpha\gamma \\ \circ & \beta & \alpha+\beta\gamma \\ 1 & \gamma & \beta+\gamma^2 \end{pmatrix} \text{ et} \\ M^3 &= MM^2 = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \alpha \\ 1 & \circ & \beta \\ \circ & 1 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \circ & \alpha & \alpha\gamma \\ \circ & \beta & \alpha+\beta\gamma \\ 1 & \gamma & \beta+\gamma^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & \alpha\gamma & \alpha\left(\beta+\gamma^2\right) \\ \beta & \alpha+\beta\gamma & \alpha\gamma+\beta\left(\beta+\gamma^2\right) \\ \gamma & \beta+\gamma^2 & \alpha+\beta\gamma+\gamma\left(\beta+\gamma^2\right) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} & \gamma M^2 + \beta M + \alpha I_3 \\ = {} & \gamma\begin{pmatrix} \circ & \alpha & \alpha\gamma \\ \circ & \beta & \alpha+\beta\gamma \\ 1 & \gamma & \beta+\gamma^2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} \circ & \circ & \alpha \\ 1 & \circ & \beta \\ \circ & 1 & \gamma \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 1 & \circ & \circ \\ \circ & 1 & \circ \\ \circ & \circ & 1 \end{pmatrix} \\ = {} & \begin{pmatrix} \alpha & \alpha\gamma & \alpha\beta+\alpha\gamma^2 \\ \beta & \alpha+\beta\gamma & \gamma\left(\alpha+\beta\gamma\right)+\beta^2 \\ \gamma & \beta+\gamma^2 & \alpha+\beta\gamma+\gamma\left(\beta+\gamma^2\right) \end{pmatrix} \\ = {} & M^3,\ c.\ q.\ f.\ d.. \end{aligned}$$

2. **(2pts +2pts + 2pts)**

(a) Le sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect}\left\{A^k\ ;\ 0 \leq k \leq d^2\right\}$ de $M_d(\mathbf{K})$ est de dimension finie inférieure ou égale à $\dim M_d(\mathbf{K}) = d^2$, donc le rang de la famille $\left\{A^k\right\}_{0\leq k\leq d^2}$ est strictement plus petit que sa longueur. On en déduit que cette famille est liée, d'où une famille de scalaires $(\lambda_k)_{0\leq k\leq d^2}$ non nulle telle que $\sum_{k=0}^{d^2} \lambda_k A^k = 0$, ce qui montre que le polynôme $\sum_{k=0}^{d^2} \lambda_k X^k$ est non nul et annule A, donc appartient à $\mathbf{I}(A)$ sans appartenir à $\{0\}$. Ces deux derniers ensembles ne peuvent donc être égaux.

(b) Notons $D := \{\deg p\ ;\ p \in \mathbf{I}(A) \text{ et } p \text{ unitaire}\}$. La question précédente nous donne un polynôme non nul dans $\mathbf{I}(A)$; quitte à le normaliser, on obtient un polynôme unitaire dans $\mathbf{I}(A)$, ce qui montre que D est non vide. Cette partie de $\mathbf{N}$ admet donc un plus petit élément d_0, atteint en un certain $p_0 \in \mathbf{I}(A)$. Par construction de D, tous les polynômes unitaires de $\mathbf{I}(A)$ sont de degré au moins d_0, ce qui montre que p_0 est bien un élément unitaire de $\mathbf{I}(A)$ de degré minimal.

(c) Supposons $\mu \mid P$. Soit D tel que $P = D\mu$. Puisque $\mu \in \mathbf{I}(A)$, la question 1a montre que $P \in \mathbf{I}(A)$.

Supposons $P \in \mathbf{I}(A)$. Effectuons une division euclidienne de P par μ (on peut car μ est non nul (il est unitaire)) : $P = \mu Q + R$ avec $\deg R < \deg \mu$. On a alors l'appartenance $R = P - \mu Q \in \mathbf{I}(A)$ (d'après la question 1a) et la comparaison $\deg R < d_0$: si R était non nul, son normalisé appartiendrait alors à $\mathbf{I}(A)$ et serait de degré $< d_0$, ce qui contredirait la minimalité de d_0. Le polynôme R doit donc être nul, d'où $P = \mu Q$ et $\mu \mid P$, $c.\ q.\ f.\ d.$.

Problème (12pts).

1. **(1pt)** La fonction $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{F}{\mapsto} \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix}$ est bien définie sur et stabilise $\mathbf{R}^2$, lequel contient $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ce qui montre l'existence et l'unicité d'une suite (u_n) telle que $u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = F(u_n)$. La suite $\left(\begin{pmatrix} F_n \\ G_n \end{pmatrix}\right) := (u_n)$ répond alors au problème. Explicitement, on a $\forall n \in \mathbf{N}$, $\begin{pmatrix} F_n \\ G_n \end{pmatrix} = F^{\circ n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. **(1pt)** En remarquant pour tout $X \in \mathbf{R}^2$ l'égalité $F(X) = \Phi X$, on peut affirmer les égalités
$$\begin{pmatrix} F_d \\ G_d \end{pmatrix} = F^{\circ d} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \Phi^d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \Phi^{d-1} \Phi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \Phi^{d-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ c.\ q.\ f.\ d..$$

3. **(2pts)** Soit $t \in \mathbf{K}$. On a les égalités
$$\chi(t) = \det(\Phi - tI_2) = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \circ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t & \circ \\ \circ & t \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -t \end{vmatrix} = t^2 - t - 1,$$
ce qui montre que χ est la fonction polynomiale associée au polynôme $X^2 - X - 1$. Le discriminant de ce dernier vaut $(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$, ses racines sont donc $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,618$ et $\phi := \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \varphi$.

4. **(3pts)** Soient λ une racine de χ et $X =: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$. On a les équivalences
$$\begin{aligned}
\Phi X = \lambda X &\iff \begin{cases} x + y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda y + y = \lambda^2 y \\ x = \lambda y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y\left(1 + \lambda - \lambda^2\right) = 0 \\ x = \lambda y \end{cases} \\
&\underset{\text{racine de } \chi}{\overset{\text{car } \lambda \text{ est une}}{\iff}} \begin{cases} 0 = 0 \\ x = \lambda y \end{cases} \\
&\iff x = \lambda y \\
&\iff X = y \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\iff \exists t \in \mathbf{R},\ X = t \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\iff X \in \mathbf{R} \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

5. **(1pt)** Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$ et $\mathcal{B}'$ la famille $\left(\begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Le déterminant de $\mathcal{B}'$ vaut $\begin{vmatrix} \varphi & \phi \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \varphi - \phi = \sqrt{5} \neq 0$, ce qui montre que cette famille est libre dans $\mathbf{R}^2$, donc (puisqu'elle est par ailleurs de longueur $2 = \dim \mathbf{R}^2$) en est une base. La question précédente montre que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'} \Phi = \begin{pmatrix} \varphi & \circ \\ \circ & \phi \end{pmatrix}$, laquelle matrice vaut par ailleurs $P^{-1} (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} \Phi) P = P^{-1} \Phi P$ où l'on a posé $P := \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \varphi & \phi \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. **(2pts)** Remarquons que F_d est le coefficient d'indice $(1,1)$ dans $\begin{pmatrix} F_d \\ G_d \end{pmatrix} = \Phi^{d-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et que $\Phi^{d-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

vaut la première colonne de Φ^{d-1}. Par conséquent, F_d est le coefficient d'indice $(1,1)$ de la matrice

$$\begin{aligned}
\Phi^{d-1} &= \left(PDP^{-1}\right)^{d-1} \\
&= PP^{-1}\underbrace{\left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)\cdots\left(PDP^{-1}\right)}_{d-1 \text{ facteurs } PDP^{-1}} \\
&= P\underbrace{\left(P^{-1}P\right)D\left(P^{-1}P\right)D\cdots\left(P^{-1}P\right)D}_{d-1 \text{ facteurs } (P^{-1}P)D}P^{-1} \\
&= P\underbrace{\left(DD\cdots D\right)}_{d-1 \text{ facteurs } D}P^{-1} \\
&= PD^{d-1}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} \varphi & \circ \\ \circ & \phi \end{pmatrix}^{d-1} P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \varphi & \phi \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi^{d-1} & \circ \\ \circ & \phi^{d-1} \end{pmatrix}\frac{1}{\begin{vmatrix} \varphi & \phi \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}\begin{pmatrix} 1 & ? \\ -1 & ? \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \varphi^d & \phi^d \\ ? & ? \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & ? \\ -1 & ? \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\varphi^d-\phi^d}{\sqrt{5}} & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}, \text{ \textit{c. q. f. d.}.}
\end{aligned}$$

7. **(1pt)** Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a les égalités et tendance

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\frac{\varphi^{n+1}-\phi^{n+1}}{\sqrt{5}}}{\frac{\varphi^n-\phi^n}{\sqrt{5}}} \underset{\text{et en bas par } \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}}{\overset{\text{diviser en haut}}{=}} \frac{\varphi-\phi\left(\frac{\phi}{\varphi}\right)^n}{1-\left(\frac{\phi}{\varphi}\right)^n} \underset{\text{que } \left|\frac{\phi}{\varphi}\right|<1}{\overset{\text{sous réserve}}{\longrightarrow}} \frac{\varphi-\phi 0}{1-0} = \varphi.$$

Il reste à montrer $\left|\frac{\phi}{\varphi}\right| < 1$. Le produit des racines de χ vaut son coefficient constant -1, d'où l'on tire $\frac{\phi}{\varphi} = \frac{\phi^2}{\varphi\phi} = \frac{1+\phi}{-1} = \frac{\sqrt{5}-3}{2}$. Vu que $2^2 \leq 5 \leq 3^2$, on a $2 \leq \sqrt{5} \leq 3$, d'où $-1 \leq \sqrt{5}-3 \leq 0$, ce qui conclut aux comparaisons $\left|\frac{\phi}{\varphi}\right| \leq \frac{1}{2} < 1$.

8. **(1pt)** La suite (F_n) est la célèbre suite de Fibonacci – et le nombre φ est le (non moins) célèbre nombre d'or.