Devoir surveillé 7
bis (deux heures)

lundi 3 juin 2013

Le sujet est sur 63 points.
La note sur 20 s'obtiendra en appliquant au nombre de points sur 63 la fonction $18,6\frac{\mathrm{Id}}{21,5}\left(2-\frac{\mathrm{Id}}{21,5}\right)$

La calculatrice est interdite. Pour tout le sujet, on fixe un entier $n \in \mathbf{N}^*$.

Polynômes. (29 pts)

1. (a) **(1 pt)** *Définir $\mathbf{K}_n[X]$ et définir sa base canonique (on admettra qu'il s'agit bien d'une base).*
   (b) **(1 pt)** *Donner la dimension de $\mathbf{K}_n[X]$.*
2. **(3 pts)** *Énoncer et prouver la formule de Leibniz donnant les dérivées successives d'un produit de deux polynômes.*
3. (a) **(1 pt)** *Énoncer (sans preuve) le théorème de la division euclidienne.*
   (b) **(1 pt)** *Effectuer la division euclidienne de $7X^5+1$ par X^3-2X.*
   (c) **(2 pts)** *Soit $\theta \in \mathbf{R}$: trouver le reste de la division euclidienne de $((\sin\theta)X+\cos\theta)^n$ par X^2+1.*
4. (a) **(1 pt)** *Soit $A \in \mathbf{K}[X]$: traduire (sans preuve) l'énoncé $\left(\forall i \in \{1,2,...,n\},\ \sqrt[42]{\operatorname{th} i} \text{ est racine de } A\right)$ en termes de divisiblité.*
   (b) **(3 pts)** *Montrer $\exists! P \in \mathbf{K}[X],\ \left(\deg P \leq n \text{ et } \left(\forall i \in \{0,1,...,n\},\ P\left(\sqrt[42]{\operatorname{th} i}\right) = \ln(i+1)\right)\right)$.*
5. (a) **(1 pt)** *Soit $(P,\lambda) \in \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}$. Donner (sans preuve) deux caractérisations (non trivialement) équivalentes de l'ordre de λ comme racine de P.*
   (b) **(2 pt)** *Montrer que le polynôme $\sum_{i=0}^{n} \frac{X^i}{i!}$ n'a pas de racine multiples.*
6. (a) **(1 pt)** *Donner (sans preuve) deux relations (non triviales) liant les racines d'un polynôme scindé à ses coefficients.*
   (b) **(1 pt)** *Trouver les somme et produit des racines n-ièmes de l'unité.*
7. **(2 pts)** *Soit P un polynôme réel de degré $18+1$. Montrer qu'il admet une racine réelle.*
8. (a) **(1 pt)** *Peut-on scinder X^2+1 dans $\mathbf{R}[X]$? dans $\mathbf{C}[X]$?*
   (b) **(2 pts)** *Décomposer dans $\mathbf{R}[X]$ le polynôme X^4+1 en produit de facteurs irréductibles.*
9. **(3 pts)** *Soit P un polynôme complexes dont les ordres des racines complexes sont distincts et tel que $P(t)$ est réel pour tout réel t. Montrer $P \in \mathbf{R}[X]$.*
10. **(3 pts)** *Soit P un polynôme réel scindé dans $\mathbf{R}[X]$. Montrer que $P' - 42P$ est scindé dans $\mathbf{R}[X]$.*

Matrices. (32 pts) On fixe deux entiers naturels p et q.

1. (a) **(1 pt)** *Définir* $M_{p,q}(\mathbf{K})$ *et* $M_n(\mathbf{K})$ *et définir leurs bases canoniques (on admettra qu'il s'agit bien de bases).*

   (b) **(1 pt)** *Donner les dimensions de* $M_{p,q}(\mathbf{K})$ *et* $M_n(\mathbf{K})$.

2. (a) **(1 pt)** *Définir le produit de deux matrices.*

   (b) **(1 pt)** *Montrer que la multiplication de* $M_2(\mathbf{K})$ *n'est ni commutative ni intègre.*

3. Soient E et F deux espaces vectoriels chacun de dimension finie.

   (a) **(1 pt)** *Donner (sans preuve) deux entiers* n *et* m *ainsi qu'un isomorphisme d'espaces vectoriels de* $M_{p,q}(\mathbf{K})$ *vers* $L(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^m)$.

   (b) **(1 pt)** *Donner (sans preuve) deux entiers* n *et* m *ainsi qu'un isomorphisme d'espaces vectoriels de* $L(E,F)$ *vers* $M_{n,m}(\mathbf{K})$.

4. Soit $A \in M_{p,q}(\mathbf{K})$.

   (a) **(1 pt)** *Définir l'application linéaire canoniquement associée à* A.

   (b) **(2 pt)** *Décrire la matrice de l'application linéaire canoniquement associée à* A *dans les bases canoniques (des espaces de départ et d'arrivée).*

5. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ trois bases de E.

   (a) **(1 pt)** *Définir la matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *vers* $\mathcal{B}'$*, donner (sans preuve) une égalité (non triviale) reliant* $\operatorname{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, $\operatorname{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}'')$ *et* $\operatorname{Pass}(\mathcal{B}', \mathcal{B}'')$.

   (b) **(2 pts)** *Démontrer que* $\operatorname{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ *est inversible et donner son inverse.*

   (c) **(3 pts)** *Soit* $\theta \in \mathbf{R}$. *Décrire la matrice* $\operatorname{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ *lorsque* E *est un plan et lorsque* $\mathcal{B}'$ *est formée des images des vecteurs de* $\mathcal{B}$ *par la rotation (vectorielle) de* E *d'angle* θ.

6. **(2 pts)** *Donner (sans preuve) les TROIS formules de changement de bases (pour des vecteurs, des endomorphismes, des applications linéaires).*

7. (a) **(1 pt)** *Transposer la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

   (b) **(1 pt)** *Définir les adjectifs "symétrique" et "anti-symétrique" (appliqués à une matrice).*

   (c) **(2 pts)** *On admet que la transposition est un endomorphisme de* $M_n(\mathbf{K})$. *Montrer que les matrices symétriques de* $M_n(\mathbf{K})$ *et les matrices anti-symétriques de* $M_n(\mathbf{K})$ *forment deux sous-espaces vectoriels de* $M_n(\mathbf{K})$ *suspplémentaires.*

8. (a) **(1 pt)** *Donner la matrice* $\operatorname{Mat}_{(X^k)_{0 \leq k \leq 3}} (1+X)^3$.

   (b) **(2 pts)** *Trouver la matrice* $\operatorname{Mat}_{\left(\frac{X^p}{p!}\right)_{0 \leq p \leq 4}} \left((1+X)^3, (2+X^2)^2\right)$.

   (c) **(2 pts)** *Décrire la matrice de l'endomorphisme "dérivation" de* $\mathbf{K}_3[X]$ *dans sa base canonique.*

   (d) **(2 pts)** *Préciser la matrice de l'application linéaire* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{K}_3[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}_2[X] \\ P & \longmapsto & (X+1)P'' \end{array}\right.$ *dans les bases canoniques (au départ comme à l'arrivée).*

9. **(2 pts)** *Notons* x *le polynôme* $(1+X)^3$ *et posons* $L : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{K}_3[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}_2[X] \\ P & \longmapsto & (X+1)P'' \end{array}\right.$. *Calculer* $\operatorname{Mat} L(x)$ *(dans la base canonique) de deux façons différentes.*

10. **(2 pts)** *Notons* Δ *la dérivation de* $\mathbf{K}_3[X]$ *et* L *comme à la question précédente. Calculer* $\operatorname{Mat}(L \circ \Delta)$ *(dans les bases canoniques au départ et à l'arrivée) de deux façons différentes.*