Devoir surveillé 6

concours blanc

samedi 20 avril 2012

Début d'année.

1. Notons D la droite donnée. Elle est dirigé par le vecteur $\overrightarrow{\binom{0}{2}\binom{18}{11}} = \binom{18}{9} \parallel \binom{2}{1}$. Soit $\binom{x}{y} \in \mathbf{R}^2$. On a les équivalences

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D \Longleftrightarrow \overrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x & 2 \\ y-2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow 2y = x+4.$$

Soit $H =: \binom{u}{v}$ le projeté orthogonal de $\binom{7}{3}$ *sur* D. Le vecteur $\overrightarrow{\binom{7}{3}H}$ est alors orthogonal à tout vecteur directeur de D, par exemple $\binom{2}{1}$, ce qui s'écrit $0 = \binom{u-7}{v-3} \cdot \binom{2}{1} = 2u - 14 + v - 3$. Par ailleurs, H appartient à D, d'où l'égalité $2v = u + 4$. Substituer v dans la première égalité donne $0 = 2u + \left(\frac{u}{2} + 2\right) - 17$, d'où $u = 6$ et $v = 17 - 2u = 5$. La distance cherchée vaut donc

$$\left\|\overrightarrow{\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} H}\right\| = \left\|\overrightarrow{\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

2. Notons P le plan considéré. Alors P est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc admet pour vecteur normal leur produit vectoriel $n := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit alors $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$. On a les équivalances

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P \quad & \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} \perp n \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow 0 + (y-1) + (z-1) = 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad y + z = 2. \end{aligned}$$

La distance au plan P du $(7, 5, -1)$ vaut par conséquent

$$\frac{|0 \cdot 7 + 1 \cdot 5 + 1\,(-1) - 2|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

3. Soit $t \in \mathbf{R}$ (autre que $-\frac{4}{5}$). On alors les égalités

$$\frac{4}{5}\frac{5t+9}{5t+4} = \frac{4}{5}\frac{5t+4+5}{5t+4} = \frac{4}{5}\left(1 + \frac{5}{5t+4}\right) = \frac{4}{5}\left(1 + \frac{1}{t + \frac{4}{5}}\right),$$

ce qui montre que la fonction considérée se factorise sous la forme

$$\frac{4}{5}\operatorname{Id} \circ (\operatorname{Id} + 1) \circ \frac{1}{\operatorname{Id}} \circ \left(\operatorname{Id} + \frac{4}{5}\right).$$

Pour obtenir son graphe, on part de celui de $\frac{1}{\operatorname{Id}}$, on le translate horizontalement de $-\frac{4}{5}$, verticalement de $+1$ puis on lui appliquer une affinité orthogonale d'axe celui des abscisses et de rapport $\frac{4}{5}$.

4. Notons s l'application proposée. Elle est de la forme $a\,\mathrm{Id}+b$ où a et b sont deux complexes tels que $|a|=3$ et $\operatorname{Arg} a=\frac{\pi}{2}$, donc il s'agit d'une similitude directe de rapport 3 et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Notons ω son centre. On a alors $\omega=s(\omega)=3i\omega+2$, d'où $\omega=\frac{2}{1-3i}=\frac{2(1+3i)}{1^2+3^2}=\frac{1+3i}{5}$. **Sanity check** : retrouver graphiquement l'image $s(0)=2$ de 0.

La réflexion proposée est une isométrie indirecte, donc agit sur $\mathbf{C}$ comme $z\mapsto a\overline{z}+b$ où a et b sont deux complexes tels que $|a|=1$. Puisqu'elle fixe 0 et $1-i$, on a les égalités $\begin{cases} 0=a\overline{0}+b \\ 1-i=a(1+i)+b \end{cases}$, *i. e.* $\begin{cases} b=0 \\ a=\frac{1-i}{1+i} \end{cases}$, *i. e.* $\begin{cases} b=0 \\ a=-i \end{cases}$.

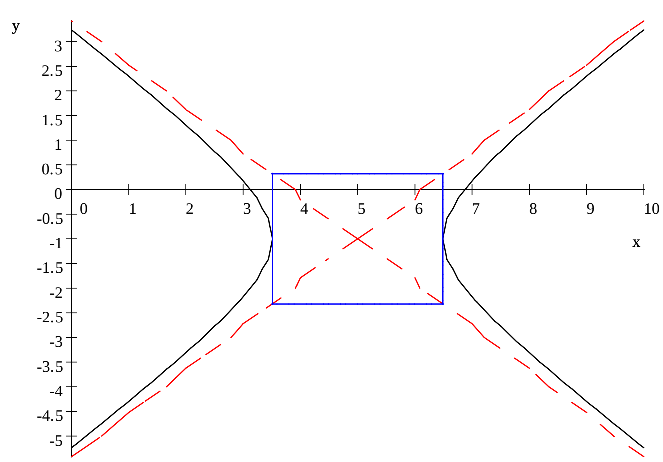
5. Soit $t\in\mathbf{R}$. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
t \text{ est solution de l'équation proposée} &\iff \cos(3t)+\sqrt{3}\sin(3t)=\sqrt{2} \\
&\iff \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}\cos\left(3t-\arctan\sqrt{3}\right)=\sqrt{2} \\
&\iff \cos\left(3t-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\iff \cos\left(3t-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{4} \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} 3t-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4} \text{ modulo } 2\pi \\ \text{ou} \\ 3t-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{4} \text{ modulo } 2\pi \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} \exists k\in\mathbf{Z},\ 3t-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k\in\mathbf{Z},\ 3t-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \end{array}\right. \\
&\iff \exists k\in\mathbf{Z},\ \left\{\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+2k\right) \\ \text{ou} \\ t=\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+2k\right) \end{array}\right. \\
&\iff \exists k\in\mathbf{Z},\ \left\{\begin{array}{l} t=\left(2k+\frac{7}{12}\right)\frac{\pi}{3} \\ \text{ou} \\ t=\left(2k+\frac{1}{12}\right)\frac{\pi}{3} \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\left(2\mathbf{Z}+\frac{7}{12}\right)\frac{\pi}{3}\cup\left(2\mathbf{Z}+\frac{1}{12}\right)\frac{\pi}{3}$.

6. Soit $(x,y)\in\mathbf{R}^2$. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
& (x,y) \text{ appartient au lieu considéré} \\
\iff & 64x^2+1375=640x+162y+81y^2 \\
\iff & 64\left(x^2-10x+25\right)-\underbrace{(8\cdot 5)^2}_{=40^2=1600}+1375=81\left(y^2+2y+1\right)-81 \\
\iff & 64(x-5)^2-81(y+1)^2=\underbrace{225-81}_{=144=12^2} \\
\iff & \left(\frac{8}{12}\right)^2(x-5)^2-\left(\frac{9}{12}\right)^2(y+1)^2=1 \\
\iff & \left(\frac{x-5}{\frac{3}{2}}\right)^2-\left(\frac{y+1}{\frac{4}{3}}\right)^2=1.
\end{aligned}$$



Le lieu cherché est donc l'hyperbole de centre $(5,-1)$, d'axe focal la droite horizontale d'ordonnée -1, de demi-axe focal $\frac{3}{2}$ et de demi-axe non focal $\frac{4}{3}$. **Bonus** : son excencrité vaut

$$\sqrt{1+\left(\frac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{2}}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{8}{9}\right)^2}=\frac{\sqrt{81+64}}{9}=\frac{\sqrt{145}}{9}\simeq\frac{\sqrt{144}}{9}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}\simeq 1,3.$$

7. Soit $t\in\mathbf{R}$. Le réel $(\operatorname{sh}t)^{\operatorname{th}t}+(\operatorname{th}t)^{\operatorname{sh}t}=e^{(\operatorname{th}t)\times\ln(\operatorname{sh}t)}+e^{(\operatorname{sh}t)\times\ln(\operatorname{th}t)}$ fait sens ssi les réels $\operatorname{th}t$, $\operatorname{sh}t$ et leurs logarithmes font sens, *i. e.* ssi $\operatorname{th}t$ et $\operatorname{sh}t$ font sens et sont strictement positifs, *i. e.* ssi $t>0$. Le domaine de définition cherché est donc $\mathbf{R}_+^*$.

Soit $u\geq\operatorname{argsh}1$. On a ainsi $\operatorname{sh}u\geq 1$ par croissance de sh sur $\mathbf{R}_+$, ce qui permet de préciser le signe de la dérivée

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\left((\operatorname{sh}u)^{\operatorname{th}u}+(\operatorname{th}u)^{\operatorname{sh}u}\right) &= \frac{\partial}{\partial u}e^{(\operatorname{th}u)\times\ln(\operatorname{sh}u)}+\frac{\partial}{\partial u}e^{(\operatorname{sh}u)\times\ln(\operatorname{th}u)}\\
&= \left((\operatorname{th}'u)\ln(\operatorname{sh}u)+\operatorname{th}u\frac{\operatorname{sh}'u}{\operatorname{sh}u}\right)e^{(\operatorname{th}u)\times\ln(\operatorname{sh}u)}\\
&\quad+\left((\operatorname{sh}'u)\ln(\operatorname{th}u)+\operatorname{sh}u\frac{\operatorname{th}'u}{\operatorname{th}u}\right)e^{(\operatorname{sh}u)\times\ln(\operatorname{th}u)}\\
&= \underbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{\operatorname{ch}^2u}}_{\geq 0}\underbrace{\ln(\operatorname{sh}u)}_{\geq\ln 1=0}+1\right)}_{>0}\underbrace{e^{(\operatorname{th}u)\times\ln(\operatorname{sh}u)}}_{>0}+\left(\ln(\operatorname{th}u)+\frac{1}{\operatorname{ch}^2u}\right)\underbrace{(\operatorname{ch}u)\,e^{(\operatorname{sh}u)\times\ln(\operatorname{th}u)}}_{>0}.\end{aligned}$$

Pour conclure à la croissance recherchée, il suffit de montrer que la seconde parenthèse $\ln t+1-t^2$ (où l'on a posé $t:=\operatorname{th}u$) est positive. Or on a $\frac{\partial}{\partial t}\left(\ln t+1-t^2\right)=\frac{1}{t}-2t$ qui est du signe de $1-2t^2$, *i. e.* de $\frac{1}{\sqrt{2}}-t$, ce qui montre que la fonction $\ln+1-\mathrm{Id}^2$ décroît sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]$; puisqu'elle est nulle en 1 et que $t\leq 1$, il suffit de montrer que $t\geq\frac{1}{\sqrt{2}}$. Or la croissance de th permet d'affirmer $t\geq\operatorname{th}\operatorname{argsh}1=\frac{1}{\sqrt{1+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, *c. q. f. d.* (on a utilisé l'égalité $\operatorname{th}\operatorname{argsh}a=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ valide pour tout réel a).

8. Il est clair que i n'est pas solution puisqu'on a $(i+i)^{18}-(i-i)^{18}=(2i)^{18}\neq 0$. Soit alors $c\in\mathbf{C}\setminus\{i\}$. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
&\quad c \text{ est solution de l'équation proposée}\\
\iff&\quad (c+i)^{18}-(c-i)^{18}=0\\
\iff&\quad (c+i)^{18}=(c-i)^{18}\\
\iff&\quad \left(\frac{c+i}{c-i}\right)^{18}=1\qquad\text{(on peut diviser car } c\neq i)\\
\iff&\quad \left(\frac{c+i}{c-i}\right)^{18}=1\quad\text{ et }\quad\frac{c+i}{c-i}\neq 1\qquad\begin{array}{l}\text{(on a effet les équivalences } \frac{c+i}{c-i}\neq 1\iff\\ c+i\neq c-i\iff 2i\neq 0\text{, ce qui est vrai)}\end{array}\\
\iff&\quad \exists k\in\{1,2,...,17\},\ \frac{c+i}{c-i}=e^{2\pi i\frac{k}{18}}\qquad\text{(on a exclu } k\in 18\mathbf{Z}\text{ pour exclure le cas } e^{2\pi i\frac{k}{18}}=1)\\
\iff&\quad \exists k\in\{1,2,...,17\},\ c+i=e^{\frac{\pi ik}{9}}(c-i)\\
\iff&\quad \exists k\in\{1,2,...,17\},\ c\left(1-e^{\frac{\pi ik}{9}}\right)=-i\left(1+e^{\frac{\pi ik}{9}}\right)\\
\iff&\quad \exists k\in\{1,2,...,17\},\ c\left(2i\sin\frac{\pi k}{18}e^{\frac{\pi ik}{18}}\right)=i\left(2\cos\frac{\pi k}{18}e^{\frac{\pi ik}{18}}\right)\qquad\left(\begin{array}{ll}\text{on rappelle} & 1+e^{i\theta}=2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}\\ \text{les égalités} & 1-e^{i\theta}=-2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}\end{array}\right)\\
\iff&\quad \exists k\in\{1,2,...,17\},\ c=\cot\frac{\pi k}{18}\qquad\text{(on peut diviser par}\sin\frac{\pi k}{18}\text{ car } 0<\frac{\pi k}{18}<\pi).
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\left\{\cot\frac{\pi}{18},\cot\frac{2\pi}{18},\cot\frac{3\pi}{18},...,\cot\frac{17\pi}{18}\right\}$.

9. Soit $f\in C^\infty\left(\mathbf{R}_+^*,\mathbf{R}\right)$. L'équation donnée fait bien sens (l'argument du logarithme à gauche et le dénominateur à droite sont strictement positifs) et est linéaire (affine) du premier ordre. Son facteur

intégrant vaut e^L où L est une primitive de ln, par exemple $L : t \mapsto t \ln t - t$ (suggéré par l'indication). Le facteur intégrant vaut donc $t \mapsto e^{t \ln t - t} = \left(\frac{t}{e}\right)^t$. On en déduit les équivalences

$$\begin{aligned}
& f \text{ est solution de la première équation} \\
\iff \quad & \forall x > 0,\ f'(x) + (\ln x) f(x) = \left(\frac{e}{x}\right)^x \operatorname{th} x \\
\iff \quad & \forall x > 0,\ \left(\frac{x}{e}\right)^x f'(x) + \left(\frac{x}{e}\right)^x (\ln x) f(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \\
\iff \quad & \forall x > 0,\ \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{x}{e}\right)^x f(x)\right] = \frac{\operatorname{ch}' x}{\operatorname{ch} x} \\
\iff \quad & \forall x > 0,\ \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{x}{e}\right)^x f(x) - \ln(\operatorname{ch} x)\right] = 0 \\
\iff \quad & x \mapsto \left(\frac{x}{e}\right)^x f(x) - \ln(\operatorname{ch} x) \text{ est constante sur } \mathbf{R}_+^* \\
\iff \quad & \exists C \in \mathbf{R},\ \forall x > 0,\ \left(\frac{x}{e}\right)^x f(x) - \ln(\operatorname{ch} x) = C \\
\iff \quad & \exists C \in \mathbf{R},\ \forall x > 0,\ f(x) = \left(\frac{e}{x}\right)^x (C + \ln(\operatorname{ch} x)).
\end{aligned}$$

10. Soit $g \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. L'équation fait bien sens et est linéaire (affine) du deuxième ordre. Son polynôme caractéristique vaut $\chi := X^2 - 7X + 10 = (X-2)(X-5)$, donc le plan vectoriel des solutions de l'équation sans second membre est Vect $\left\{e^{2\,\mathrm{Id}}, e^{5\,\mathrm{Id}}\right\}$. Pour trouver une solution avec second membre, le principe de superposition nous dit qu'il suffit d'additionner deux solutions avec pour seconds membres respectifs $t \mapsto te^{-2t}$ et $t \mapsto (2t+1)e^{5t}$. Dans le premier (resp. second) cas, on peut chercher une solution de la forme $t \mapsto P(t)e^{-2t}$ car -2 n'est pas racine de χ (resp. $t \mapsto tP(t)e^{5t}$ car 5 est racine simple de χ) où $P \in \mathbf{R}_1[X]$. Soit donc $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

Posons $u : t \mapsto (at+b)e^{-2t}$. On a pour tout réel t les égalités

$$\begin{aligned}
u'(t) &= e^{-2t}(a - 2(at+b)) = e^{-2t}((a-2b) - 2at) \text{ et} \\
u''(t) &= e^{-2t}(-2a - 2(a - 2b - 2at)) = e^{-2t}(4b - 4a + 4at),
\end{aligned}$$

d'où les implications

$$\begin{aligned}
& u \text{ solution dans le premier cas} \\
\Longleftarrow \quad & \forall t \in \mathbf{R},\ u''(t) - 7u'(t) + 10u(t) = te^{-2t} \\
\Longleftarrow \quad & \forall t \in \mathbf{R},\ (4b - 4a + 4at) - 7(a - 2b - 2at) + 10(at+b) = t \\
\Longleftarrow \quad & \forall t \in \mathbf{R},\ t(28a - 1) + (-11a + 28b) = 0 \\
\Longleftarrow \quad & \left\{\begin{array}{c} 28a - 1 = 0 \\ 11a = 28b \end{array}\right. \Longleftarrow \left\{\begin{array}{c} a = \frac{1}{28} \\ b = \frac{11}{28^2} \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

Posons $v : t \mapsto t(at+b)e^{5t}$. On a pour tout réel t les égalités

$$\begin{aligned}
v'(t) &= e^{5t}\left((2at+b) + 5\left(at^2 + bt\right)\right) = e^{5t}\left(5at^2 + (5b+2a)t + b\right) \text{ et} \\
v''(t) &= e^{5t}\left((10at + (5b+2a)) + 5\left(5at^2 + (5b+2a)t + b\right)\right) = e^{5t}\left(25at^2 + (20a+25b)t + (10b+2a)\right),
\end{aligned}$$

d'où les implications

$$\begin{aligned}
& v \text{ solution dans le second cas} \\
\Longleftarrow \quad & \forall t \in \mathbf{R},\ v''(t) - 7v'(t) + 10v(t) = (2t+1)e^{5t} \\
\Longleftarrow \quad & \forall t \in \mathbf{R},\ \left(25at^2 + (20a+25b)t + (10b+2a)\right) - 7\left(5at^2 + (5b+2a)t + b\right) + 10\left(at^2 + bt\right) = 2t + 1 \\
\Longleftarrow \quad & \forall t \in \mathbf{R},\ (6a - 2)t + (2a + 3b - 1) = 0 \\
\Longleftarrow \quad & \left\{\begin{array}{c} 3a - 1 = 0 \\ 3b = 1 - 2a \end{array}\right. \Longleftarrow \left\{\begin{array}{c} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{9} \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

On en déduit une solution de l'équation de départ : $t \mapsto \left(\frac{t}{28} + \frac{11}{28^2}\right)e^{-2t} + t\left(\frac{t}{3} + \frac{1}{9}\right)e^{5t}$, ce qui permet de décrire le plan (affine) des solutions :

$$\begin{aligned}
& g \text{ est solution de la seconde équation} \\
\iff \quad & \exists (A, B) \in \mathbf{C}^2,\ \forall t \in \mathbf{R},\ g(t) = Ae^{2t} + \left(\frac{t}{28} + \frac{11}{28^2}\right)e^{-2t} + \left(\frac{t^2}{3} + \frac{t}{9} + B\right)e^{5t}.
\end{aligned}$$

Suites et espaces vectoriels.

1. *cf.* cours.

2. *cf.* en remplaçant le numérateur 1 par 18.

3. Posons $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \frac{4}{5}\frac{5t+9}{5t+4} \end{array} \right.$, qui est bien définie (le dénominateur est $\geq 4 > 0$) et vérifie pour tout $t \geq 0$

$$f(t) = \frac{4}{5}\frac{5t+4+5}{5t+4} = \frac{4}{5}\left(1+\underbrace{\frac{5}{5t+4}}_{\geq 0}\right) \geq \frac{4}{5},$$

ce qui montre que f stabilise $\left[\frac{4}{5},\infty\right[$. Puisque ce dernier contient 42^{18}, il existe bien une unique suite vérifiant les conditions de l'énoncé. Appelons-la (u_n).

Si (u_n) converge, elle doit converger (par continuité de f sur $\left[\frac{4}{5},\infty\right[$) vers un point fixe de f. Or on a pour tout réel $t \geq 0$ les équivalences

$$t \text{ est fixe par } f \iff f(t) = t \iff \frac{4}{5}\frac{5t+9}{5t+4} = t \iff 20t+36 = 25t^2+20t \iff t^2 = \frac{36}{25} \iff t = \frac{6}{5} \text{ (car } t \geq 0).$$

Cela nous incite à montrer que $u_n \longrightarrow \frac{6}{5}$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. On a alors les comparaisons

$$\left|u_{n+1}-\frac{6}{5}\right| = \left|f(u_n) - f\left(\frac{6}{5}\right)\right| \leq S\left|u_n - \frac{6}{5}\right| \qquad \begin{array}{l}\text{où l'on a posé } S := \sup_{\left[\frac{4}{5},\infty\right[}|f'| \\ \text{(d'après l'inégalité des accroissements finis)}\end{array},$$

d'où $\frac{\left|u_{n+1}-\frac{6}{5}\right|}{S^{n+1}} \leq \frac{\left|u_n-\frac{6}{5}\right|}{S^n}$ (on peut diviser par S sinon $|f'|$ serait nulle sur $\left[\frac{4}{5},\infty\right[$ et f'y serait alors constante), ce qui montre la décroissance de la suite $\left(\frac{\left|u_k-\frac{6}{5}\right|}{S^k}\right)$, laquelle est par conséquent majorée par son premier terme, ce qui s'écrit

$$\forall p \in \mathbf{N},\ \left|u_p - \frac{6}{5}\right| \leq S^p\left|u_0 - \frac{6}{5}\right|.$$

Pour conclure, il reste à montrer que $|S| < 1$.

Or on a pour tout réel $t \geq \frac{4}{5}$ les majorations

$$|f'(t)| = \left|\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{4}{5}\left(1+\frac{5}{5t+4}\right)\right)\right| = \left|\frac{4}{5}\frac{-5\cdot 5}{(5t+4)^2}\right| \leq 4\frac{5}{\left(5\frac{4}{5}+4\right)^2} = \frac{50}{64} < 1, \text{ ce qui conclut.}$$

4. Appelons f l'application de l'énoncé. Elle est clairement bien définie. Il s'agit de montrer qu'elle linéaire, injective et surjective.

Montrons que f est linéaire. Soient $(u,v) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ et $\lambda \in \mathbf{C}$. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a alors

$$[f(\lambda u+v)]_n = \sum_{k=0}^{n}[\lambda u+v]_k = \sum_{k=0}^{n}(\lambda u_k+v_k) = \lambda\sum_{k=0}^{n}u_k+\sum_{k=0}^{n}v_k = \lambda[f(u)]_n+[f(v)]_n = [\lambda f(u)+f(v)]_n,$$

ce qui montre l'égalité séquentielle $f(\lambda u+v) = \lambda f(u)+f(v)$.

Montrons que f est injective. Soit $u \in \operatorname{Ker} f$. Supposons $u \neq 0$ par l'absurde. Alors la partie $\{n \in \mathbf{N}\ ;\ u_n \neq 0\}$ est non vide donc admet un plus petit élément – appelons-le N. On a alors $\forall n \in \mathbf{N},\ n < N \Longrightarrow u_n = 0$, d'où l'on tire $0 = [f(u)]_N = \sum_{k=0}^{N}u_k = u_N$, ce qui contredit la définition de N.

Montrons que f est surjective. Soit $v \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. Posons $(u_n) := (v_n - v_{n-1})$ où l'on a noté $v_{-1} := 0$. On a alors pour tout entier k les égalités

$$[f(u)]_k = \sum_{p=0}^{k}u_p = \sum_{p=0}^{k}(v_p - v_{p-1}) \overset{\text{télescopage}}{=} v_k - v_{-1} = v_k,$$

ce qui montre l'égalité $f(u) = v$ et donc que la suite u est un antécédent de v par f.

5. Les trois fonctions sont bien définies sur $[0,1]$ puisque ce dernier est disjoint de $\frac{\pi}{2}+\pi\mathbf{Z}$ (ensemble de non-définition de tan).

Soit $(a,b,c)\in\mathbf{R}^3$ tel que $a\sin+b\cos+c\tan=0$. Évaluer en 0 donne $a0+b1+c0=0$, d'où $b=0$.

On a donc $a\sin+c\tan=0$, d'où (en multipliant par cot) $a\cos+c=0$ sur $]0,1[$; si a était non nul, alors cos serait constant sur $]0,1[$ (de valeur $-\frac{c}{a}$), ce qui est faux. On en déduit $a=0$.

Il reste par conséquent $c\tan=0$, d'où après évaluation en $\frac{\pi}{4}$ l'égalité $c=0$.

Autre idée pour montrer directement $c=0$. Dériver deux fois la relation de liaison donne $-a\sin-b\cos+c\left(1+\tan^2\right)'=0$, d'où en additionnant avec $a\sin+b\cos+c\tan=0$ l'égalité

$$0=c\left(\tan+2\tan\tan'\right)=c\tan\times\left(3+\tan^2\right).$$

Évaluer en $\frac{\pi}{4}$ et simplifer donne alors $c=0$.

6. Notons L le sous-espace vectoriel des relations de liaison de la famille étudiée. Soit $x=:(a,b,c,d)\in\mathbf{R}^4$. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
x\in L &\iff a\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\4\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}-2\\6\\4\\10\end{pmatrix}=0\\
&\iff \begin{cases}a+b-c-2d=0\\2b+2c+6d=0\\a+3b+c+4d=0\\-2a+4c+10d=0\end{cases}\iff\begin{cases}a+b=c+2d\\b+c+3d=0\\a+3b+c+4d=0\\a=2c+5d\end{cases}\\
&\underset{\text{dans } L_1 \text{ et } L_3}{\overset{\text{remplacer } L_4}{\iff}} \begin{cases}(2c+5d)+b=c+2d\\b+c+3d=0\\(2c+5d)+3b+c+4d=0\\a=2c+5d\end{cases}\iff\begin{cases}b+c+3d=0\\b+c+3d=0\\3b+3c+9d=0\\a=2c+5d\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}b+c+3d=0\\a=2c+5d\end{cases}\iff\begin{cases}b=-c-3d\\a=2c+5d\end{cases}\\
&\iff \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2c+5d\\-c-3d\\c\\d\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}5\\-3\\0\\1\end{pmatrix}\\
&\iff \exists(\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2,\ x=\lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}5\\-3\\0\\1\end{pmatrix}\qquad\left(\begin{array}{l}\boxed{\Longrightarrow}\text{ prendre } (\lambda,\mu):=(c,d)\\\boxed{\Longleftarrow}\text{ les troisièmes et quatrièmes}\\\text{coordonnées donnent } (c,d)=(\lambda,\mu)\end{array}\right)\\
&\iff x\in\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.
\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité $L=\operatorname{Vect}\left\{\begin{array}{c}(2,-1,1,0)\\(5,-3,0,1)\end{array}\right\}$ (c'est un plan vectoriel).

Sanity checks. La première relation de liaison $(2,-1,1,0)$ dans le Vect signifie que le deuxième vecteur de la famille considérée vaut le troisième plus deux fois le premier, ce est bien le cas puisqu'on a $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix}$. De même, la seconde relation $(5,-3,0,1)$ dans le Vect signifie que le quatrième vecteur plus cinq fois le premier vaut trois fois le deuxième, ce qui est bien le cas puisque $\begin{pmatrix}-2\\6\\4\\10\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix}$. On observera également que le premier vecteur plus le quatrième valent le deuxième plus deux fois le troisième, ce qui correspondant à la relation $(1,-1,-2,1)$, laquelle appartient bien à L puisque s'écrit $(5,-3,0,1)-2\,(2,-1,1,0)$; on obtient ainsi une autre base de $L = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{array}{c} (2,-1,1,0) \\ (1,-1,-2,1) \end{array} \right\}$.

Polynômes (extrait de CCS 2012).

Il sera utile d'introduire l'application $\delta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ p & \longmapsto & p(X+1) \end{array} \right.$. Observer alors l'égalité $\Delta = \delta - \mathrm{Id}$.

1. On demande de montrer que Δ est linéaire et stabilise $\mathbf{R}_N[X]$.

Puisque δ est linéaire (c'est une évaluation) et que $L(\mathbf{R}[X])$ est un espace vectoriel contenant $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}[X]}$, la différence $\delta - \mathrm{Id}_{\mathbf{R}[X]}$ reste dans $L(\mathbf{R}[X])$, *i. e.* Δ est linéaire.

Soit $p \in \mathbf{R}_N[X]$. On peut alors écrire $p = \sum_{n=0}^N a_n X^n$ pour certains réels $a_0, a_1, ..., a_N$, d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
\deg \Delta(p) &= \deg \left\{ \sum_{n=0}^N a_n (X+1)^n - \sum_{n=0}^N a_n X^n \right\} \\
&= \deg \left\{ \sum_{n=0}^N a_n (X+1)^n - a_n X^n \right\} \\
&\leq \max \left\{ \underbrace{\deg\left(a_n (X+1)^n - a_n X^n\right)}_{\leq \max\{\deg((X+1)^n), \deg(X^n)\} = \max\{n,n\} = n} \ ; \ 0 \leq n \leq N \right\} \\
&\leq \max\{n \ ; \ 0 \leq n \leq N\} \\
&= N, \text{ ce qui montre que } \Delta(p) \in \mathbf{R}_N[X], \text{ d'où la stabilité de } \mathbf{R}_N[X] \text{ par } \Delta.
\end{aligned}$$

2. L'énoncé nous explicite

$$\begin{aligned}
P_0 &= \frac{1}{0!} \prod_{0 \leq k < 0} (X+k) = \frac{1}{1} \prod_{k \in \emptyset} (X+k) = 1 \\
\text{et } P_1 &= \frac{1}{1!} \prod_{0 \leq k < 1} (X+k) = \frac{1}{1}(X+0) = X. \text{ On a par ailleurs les égalités} \\
P_2 &= \frac{1}{2!} \prod_{0 \leq k < 2} (X+k) = \frac{1}{2}(X+0)(X+1) = \frac{X^2+X}{2} \text{ et} \\
P_3 &= \frac{1}{3!} \prod_{0 \leq k < 3} (X+k) = \frac{1}{6}(X+0)(X+1)(X+2) = \frac{X^3+3X^2+2X}{6}.
\end{aligned}$$

On déduit de ces valeurs celles des images

$$\begin{aligned}
\Delta(P_0) &= 1 \circ (X+1) - 1 = 1 - 1 = 0, \\
\Delta(P_1) &= X \circ (X+1) - X = (X+1) - X = 1, \\
\Delta(P_2) &= \frac{(X+1)^2 + (X+1)}{2} - \frac{X^2+X}{2} = \frac{X^2+3X+2-X^2-X}{2} = X+1 \text{ et} \\
\Delta(P_3) &= \frac{(X+1)^3 + 3(X+1)^2 + 2(X+1)}{6} - \frac{X^3+3X^2+2X}{6} \\
&= \frac{\left(X^3+3X^2+3X+1\right) + \left(3X^2+6X+3\right) + 2(X+1)}{6} - \frac{X^3+3X^2+2X}{6} \\
&= \frac{3X^2+6X+6}{6} = \frac{(X+1)(X+2)}{2}.
\end{aligned}$$

Remarque : il semblerait que $\deg \Delta(p) < \deg p$ pour tout polynôme p.

3. Explicitons

$$P_{k-1}(X+1) = \frac{1}{(k-1)!} \prod_{0 \leq p < k-1} (X+1+p) = \frac{1}{(k-1)!} \prod_{1 \leq p < k} (X+p)$$

et exprimons en fonction de ce dernier les deux polynômes

$$\begin{aligned}
P_k(X+1) &= \frac{1}{k!}\prod_{0\leq p<k}(X+1+p) = \frac{1}{k!}\prod_{1\leq p\leq k}(X+p) = \frac{X+k}{k}P_{k-1}(X+1) \\
\text{et } P_k &= \frac{1}{k!}\prod_{0\leq p<k}(X+p) = \frac{X}{k}P_{k-1}(X+1). \text{ On en déduit les égalités} \\
\Delta(P_k) &= P_k(X+1) - P_k \\
&= \frac{X+k}{k}P_{k-1}(X+1) - \frac{X}{k}P_{k-1}(X+1) \\
&= P_{k-1}(X+1).
\end{aligned}$$

Interprétation : appliquer Δ sur P_k décrémente k et incrémente X, ce qui s'écrit $\Delta(P_k) = \delta(P_{k-1})$.

4. Il est temps d'observer que Δ commute avec δ (comme n'importe polynôme en δ). Ce qui précède permet ainsi d'écrire

$$\begin{aligned}
\Delta^{\circ d}(P_k) &= \Delta^{\circ(d-1)}(\Delta(P_k)) = \Delta^{\circ(d-1)}(\delta(P_{k-1})) = \left[\Delta^{\circ(d-1)}\circ\delta\right](P_{k-1}) \underset{\text{commutent}}{\overset{\delta \text{ et } \Delta}{=}} \left[\delta\circ\Delta^{\circ(d-1)}\right](P_{k-1}) \\
&= \delta\left(\Delta^{\circ(d-1)}(P_{k-1})\right),
\end{aligned}$$

d'où par une récurence l'égalité $\Delta^{\circ(d-x)}(P_k) = \delta^{\circ x}\left(\Delta^{\circ(d-x)}(P_{k-x})\right)$ pour tout entier $x \leq \min\{k,d\}$.

Supposons $d \leq k$. Remplacer dans l'égalité précédente x par $\min\{k,d\} = d$ donne alors

$$\Delta^{\circ d}(P_k) = \Delta^{\circ d-d}(P_{k-d}(X+d)) = P_{k-d}(X+d).$$

Supposons $d > k$. Remplacer dans l'égalité précédente x par $\min\{k,d\} = k$ donne alors

$$\Delta^{\circ d}(P_k) = \Delta^{\circ d-k}(P_{k-k}(X+k)) = \Delta^{\circ d-k}(1) = 0.$$

5. La famille $(P_r)_{0\leq r\leq N}$ ayant pour longueur la dimension $N+1$ de $\mathbf{R}_N[X]$, il suffit de montrer qu'elle est libre. Soit $(\lambda_i) \in \mathbf{K}^{N+1}$ tel que $\sum_{i=0}^N \lambda_i P_i = 0$. Supposons par l'absurde que les λ_i ne soient pas tous nuls. On peut alors considérer un plus entier $n \in [0,N]$ tel que $\lambda_n \neq 0$. Par minimalité, les scalaires λ_i sont nuls pour $i < n$, donc la relation de liaison se réécrit $\sum_{i=n}^N \lambda_i P_i = 0$. Puisque $-n$ est racine de P_i pour tout entier $i > n$, évaluer l'égalité précédente en $-n$ donne $\lambda_n P(-n) = 0$, d'où la disjonction $\lambda_n = 0$ (ce qui est exclu par définition de n) ou $P(-n)$ (ce qui est impossible car $-n$ n'est pas racine de P_n), ce qui est absurde.

6. $\Delta^{\circ N}$ est nul sur les $P_{k<N}$, donc nul sur leur Vect ; montrons que ce dernier vaut $\mathbf{R}_{N-1}[X]$, ce qui conclura.

La question 5 montre que $\mathrm{Vect}_{k\leq N}\{P_k\} = \mathbf{R}_N[X]$, d'où l'on déduit (puisqu'on a *invoqué* N) l'énoncé universel $\forall M \in \mathbf{N}^*,\ \mathrm{Vect}_{k\leq M}\{P_k\} = \mathbf{R}_M[X]$. On peut même remplacer $\mathbf{N}^*$ par $\mathbf{N}$ puisque

$$\underset{k\leq 0}{\mathrm{Vect}}\{P_k\} = \mathrm{Vect}\{P_0\} = \mathrm{Vect}\{1\} = \mathbf{R} = \mathbf{R}_0[X].$$

; En remplaçant alors M par $N-1$ (ce qui est possible puisque $N \in \mathbf{N}^*$), on obtient ce que l'on veut.

7. La récurrence revient au fond à montrer l'identité du binôme de Newton, ce qui est du cours (mais caché derrière beaucoup de choses encombrantes).

Au lieu de cette solution fastidieuse, utilisons le calcul dans $L(\mathbf{R}[X])$. Puisque $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}[X]}$ commute avec tout le monde, elle commute avec δ, ce qui permet d'utiliser le binôme de Newton (où le produit est la composition) pour calculer

$$\Delta^N = (\delta - \mathrm{Id})^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k}\delta^k \circ (-\mathrm{Id})^{N-k} = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k}(-1)^{n-k}\delta^k.$$

Évaluer en P donne alors l'égalité recherchée :

$$\Delta^N(P) = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k}(-1)^{n-k}\underbrace{\delta^k(P)}_{=P(X+k)}.$$

8. Soit r un entier dans $[0,N[$. La question 7 montre que la somme de gauche vaut $\Delta^{\circ N}(X^r)$; or $X^r \in R_{N-1}[X]$, donc la question 6 nous permet d'affirmer l'égalité $\Delta^{\circ N}(X^r) = 0$, ce qui conclut.