Devoir surveillé 6

concours blanc

samedi 20 avril 2012

La calculatrice est interdite.

Début d'année.

1. *Donner une équation cartésienne de la droite passant par les points* $\binom{0}{2}$ *et* $\binom{18}{11}$*. Calculer la distance à cette droite du point* $\binom{7}{3}$*.*
2. *Donner une équation cartésienne du plan passant par les points* $(1,1,1)$*,* $(2,1,1)$ *et* $(1,-1,3)$*. Calculer la distance à ce plan du point* $(7,5,-1)$*.*
3. *Expliquer comment construire le graphe de la fonction* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \frac{4}{5}\frac{5t+9}{5t+4} \end{array}\right.$ *à partir de celui de* $t \mapsto \frac{1}{t}$*.*
4. *Décrire géométriquement l'application* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & 3iz+2 \end{array}\right.$*. Décrire l'action complexe de la réflexion d'axe la seconde bissectrice.*
5. *Résoudre l'équation* $\cos(3t) + \sqrt{3}\sin(3t) = \sqrt{2}$ *d'inconnue réelle* t*.*
6. *Décrire l'ensemble des points* (a,b) *du plan tels que* $64a^2 + 1375 = 640a + 162b + 81b^2$*.*
7. *Déterminer le domaine de définition de la fonction* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & (\operatorname{sh} t)^{\operatorname{th} t} + (\operatorname{th} t)^{\operatorname{sh} t} \end{array}\right.$ *et montrer qu'elle croît sur* $[\operatorname{argsh} 1, \infty[$*.*
8. *Résoudre l'équation* $(c+i)^{18} - (c-i)^{18} = 0$ *d'inconnue complexe* c*. Les solutions devront être exprimées sous forme trigonométrique.*
9. *Trouver toutes les fonctions* $f \in C^\infty\left(\mathbf{R}_+^*, \mathbf{R}\right)$ *telles que* $\forall x > 0,\ f'(x) + (\ln x) f(x) = \left(\frac{e}{x}\right)^x \operatorname{th} x$*.* (hint ; $\frac{\partial}{\partial a}(a \ln a - a) = ?$)
10. *Expliciter toutes les fonctions* $g \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ *telles que* $\forall t \in \mathbf{R},\ f''(t) - 7f'(t) + 10f(t) = te^{-2t} + (2t+1)e^{5t}$*.* (question plus longue)

De l'art de ne pas se faire embobiner (à faire si tout le reste est fait et bien fait, sinon à méditer ce week-end).

Trois personnes vont déjeuner dans un restaurant. L'addition leur annonce un repas global à 30 EUR : ils règlent chacun 10 EUR avant de s'en aller. Le serveur qui encaisse se rend alors compte que l'addition globale était en fait de 25 EUR : il part à leur poursuite avec 5 EUR en poche pour leur rendre. Mais en chemin le serveur se demande bien comment il va pouvoir partager ces 5 EUR en trois. Il décide alors de garder 2 EUR et de rendre 1 EUR à chaque personne.

Faisons le bilan. Chaque personne a payé 9 EUR son repas, ce qui fait un total de 27 EUR. Ajoutons à cela les 2 EUR gardés par le serveur, cela fait 29 EUR. Or les personnes avaient au départ donné 30 EUR.

Où est passé l'euro manquant ?

Suites & espaces vectoriels.

1. *Donner les variations de la suite* $\left(\frac{n!}{n^n}\right)$.
2. *Montrer que les suites* $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{18^k}{k!}\right)$ *et* $\left(\frac{1}{n!n} + \sum_{k=0}^{n} \frac{18^k}{k!}\right)$ *sont adjacentes.*
3. *Montrer qu'il existe une unique suite* (a_n) *à valeurs dans* $\left[\frac{4}{5}, \infty\right[$ *vérifiant* $\begin{cases} a_0 = 42^{18} \\ \forall k \in \mathbf{N},\ \frac{5}{4}a_{k+1} = \frac{5a_k+9}{5a_k+4} \end{cases}$. *Montrer que cette suite converge et préciser sa limite.*
4. *Montrer que l'application* $\begin{cases} \mathbf{C}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \\ (a_n) & \longmapsto & \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) \end{cases}$ *est un automorphisme de l'espace vectoriel* $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$.
5. *Montrer la liberté de la famille* $(\sin, \cos, \tan)$ *de vecteurs de* $\mathbf{R}^{[0,1]}$.
6. *Montrer que la famille* $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}\right)$ *de vecteurs de* $\mathbf{R}^4$ *est liée et décrire le sous-espace vectoriel de ses relations de liaison.*

Polynômes (extrait de CCS 2012 Maths 1). Posons $\Delta : \begin{cases} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{cases}$. Pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, on note $P_k := \frac{1}{k!} \prod_{0 \leq j < k} (X + j)$. (On a ainsi $P_0 = 1$ et $P_1 = X$.) Soit $N \in \mathbf{N}^*$.

1. *Montrer que* Δ *est un endomorphisme de* $\mathbf{R}[X]$ *et un endomorphisme de* $\mathbf{R}_N[X]$.
2. *Exprimer* P_0, P_1, P_2 *et* P_3 *ainsi que leurs images respectives par* Δ.
3. *Soit* k *un entier dans* $[1, N]$. *Déterminer* $\Delta(P_k)$ *en fonction de* $P_{k-1}(X+1)$.
4. *Soient* k *un entier dans* $[0, N]$ *et* $d \in \mathbf{N}^*$. *Déterminer* $\Delta^{\circ d}(P_k)$ *en distinguant les cas* $d \leq k$ *et* $d > k$.
5. *Montrer que la famille* $(P_r)_{0 \leq r \leq N}$ *est une base de* $\mathbf{R}_N[X]$.
6. *Déduire de ce qui précède que* $\Delta^{\circ N}(P) = 0$ *pour tout polynôme* P *tel que* $\deg P < N$.
7. *Soit* $P \in \mathbf{R}[X]$. *Montrer que* $\Delta^{\circ N}(P) = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} (-1)^{N-k} P(X+k)$. (On pourra effectuer une récurrence.)
8. *En déduire pour tout entier* $r \in [0, N[$ *l'égalité* $\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} (-1)^k (X+k)^r = 0$.