Devoir surveillé 5

samedi 23 février 2012

Pour obtenir votre note (sur 20) :

1. doubler votre note sur 34,5 si elle est inférieure à 6 ;
2. sinon appliquer-lui $\frac{2\,\mathrm{Id}+28}{3}$.

Solution proposée.

Cours (9,5 pts).

1. **(1 pt)**
2. **(2 pts)**
3. **(3 pts)**
4. **(1,5 pts)**
5. **(2 pts)**
6. **(2 pts)**

Exercice 1 (8 pts).

1. **(2 pts)** On a les égalités

$$\begin{aligned}
S_0 &= \sum_{1\leq b\leq 0} \frac{1}{0+b} = 0 \qquad \text{(c'est la somme vide)},\\
S_1 &= \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2},\\
S_2 &= \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2+k} = \frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{7}{12},\\
S_3 &= \sum_{p=1}^{3} \frac{1}{3+p} = \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} = \frac{37}{60}.
\end{aligned}$$

2. **(3 pts)** Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
S_n - S_{n-1} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(n-1)+i}\\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n+(i-1)}\\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j} - \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{n+j}\\
&= \left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n-1}+\sum_{j=1}^{n-2}\frac{1}{n+j}\right) - \left(\frac{1}{n}+\sum_{j=1}^{n-2}\frac{1}{n+j}\right)\\
&= \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{n}\\
&= \frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\\
&= \frac{2n-(2n-1)}{2n\,(2n-1)}\\
&= \frac{1}{2n\,(2n-1)}.
\end{aligned}$$

Sanity check : d'après la question 1, on a $S_3 - S_2 = \frac{37}{60} - \frac{7}{12} = \frac{1}{30}$ et, d'après la question 2, on a $S_3 - S_2 = \frac{1}{(2\cdot 3)(2\cdot 3-1)} = \frac{1}{6\cdot 5} = \frac{1}{30}$.

3. **(3 pts)** Soit $N \in \mathbf{N}$. En sommant la relation précédente pour n entier parcourant $[1, N]$, on obtient

$$\begin{aligned}
-S_N &= S_0 - S_N \qquad (\text{car } S_0 = 0) \\
&= \sum_{n=1}^{N} (S_{n-1} - S_n) \qquad (\text{c'est une somme télescopique}) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{-1}{2n\,(2n-1)} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-1} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n-1} \\
&= \sum_{\substack{2 \le k \le 2N \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{1 \le k < 2N \\ k \text{ impair}}} \frac{-1}{k} \\
&= \sum_{\substack{1 \le k \le 2N \\ k \text{ pair}}} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{\substack{1 \le k \le 2N \\ k \text{ impair}}} \frac{(-1)^k}{k} \\
&= \sum_{1 \le k \le 2N} \frac{(-1)^k}{k}.
\end{aligned}$$

Exercice 2 (6 pts).

1. **(1 pt)** On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{42} \binom{42}{k} 18^k &= -\binom{42}{0} 18^0 + \sum_{k=0}^{42} \binom{42}{k} 18^k 1^{42-k} \\
&= -1 + (18+1)^{42} \\
&= 19^{42} - 1 \\
&= 19
\end{aligned}$$

2. **(2 pts)** Soit $t > 0$ un réel : on a

$$\begin{aligned}
\sum_{a=2}^{18} a \binom{18}{a} t^{a-1} &= \sum_{a=2}^{18} \binom{18}{a} \frac{d}{dt} t^a \\
&= \frac{d}{dt} \left(\sum_{a=2}^{18} \binom{18}{a} t^a 1^{18-a} \right) \\
&= \frac{d}{dt} \left((t+1)^{18} - \binom{18}{0} t^0 - \binom{18}{1} t^1 \right) \\
&= 18\,(t+1)^{17} - 0 - 18,
\end{aligned}$$

d'où en remplaçant t par 1 l'égalité

$$\sum_{a=2}^{18} a \binom{18}{a} = 18\,(1+1)^{17} - 18 = 18\left(2^{17} - 1\right).$$

3. **(3 pts)** Montrons l'égalité demandée par récurrence sur δ. Pour tout entier $n > 0$, notons E_n l'égalité $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$. On veut E_δ.

Montrons E_p : on a $\sum_{i=p}^{p} \binom{i}{p} = \binom{p}{p} = 1 = \binom{p+1}{p+1}$, *c. q. f. d.*.
Soit $n > p$ un entier tel que E_{n-1}. Montrons E_n. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=p}^{n} \binom{i}{p} &= \binom{n}{p} + \sum_{i=p}^{n-1} \binom{i}{p} \\
&= \binom{n}{p} + \binom{(n-1)+1}{p+1} \qquad \text{d'après } E_{n-1} \\
&= \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} \\
&= \binom{n+1}{p+1}, \textit{ c. q. f. d.}.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de récurrence, nous obtenons $\forall n \in \mathbf{N},\ n \geq p \Longrightarrow E_n$. En remplaçant n par δ, on en déduit $\delta \geq p \Longrightarrow E_\delta$, d'où l'on tire E_δ, *c. q. f. d.*.

Exercice 3 (11 pts).

1. **(2 pts)** Soit $t \in [0,1]$: montrons que $f(t)$ fait sens et appartient au segment $[0,1]$. Observer déjà que ce dernier est stable par $1 - \mathrm{Id}$. Ainsi, puisque t lui appartient, le réel $1-t$ aussi, donc $(1-t)^m$ fait sens et reste dans $[0,1]$, donc son image par $1-\mathrm{Id}$ reste dans $[0,1]$, *i. e.* $f(t) \in [0,1]$, *c. q. f. d.*.
2. **(3 pts)** Montrons l'inégalité demandée par récurrence sur γ. Pour tout entier $n \geq 0$, notons C_n l'inégalité $(a+b-1)^n \geq a^n + b^n - 1$. On veut C_γ.

   On a les équivalences $C_0 \Longleftrightarrow (a+b-1)^0 \geq a^0 + b^0 - 1^0 \Longleftrightarrow 1 \geq 1+1-1$, ce qui est vrai, d'où C_0.

   Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que C_n. On a

$$\begin{aligned}
(a+b-1)^{n+1} &= \underbrace{(a+b-1)^n}_{\geq a^n+b^n-1 \text{ d'après } C_n} (a+b-1) \\
&\geq (a^n+b^n-1)(a+b-1) \qquad \text{car } a+b-1 \geq 0 \text{ (utiliser } a \geq 1 \text{ et } b \geq 1) \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + a^n(b-1) + b^n(a-1) - a - b + 1 \qquad \text{en développant partiellement} \\
&= \underline{a^{n+1} + b^{n+1} - 1} + a^n(b-1) + b^n(a-1) - (a-1) - (b-1) \qquad \begin{array}{c}\text{en faisant apparaître le} \\ \text{membre de droite de } C_{n+1}\end{array} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} - 1 + \underbrace{(a^n-1)}_{\geq 0}\underbrace{(b-1)}_{\geq 0} + \underbrace{(b^n-1)}_{\geq 0}\underbrace{(a-1)}_{\geq 0} \qquad \begin{array}{c}\text{(les inégalités viennent} \\ \text{de ce que } a \geq 1 \text{ et } b \geq 1)\end{array} \\
&\geq a^{n+1} + b^{n+1} - 1, \text{ d'où } C_{n+1}.
\end{aligned}$$

   D'après le théorème de récurrence, on obtient $\forall k \in \mathbf{N},\ C_k$, d'où (en remplaçant k par γ) l'inégalité C_γ, *c. q. f. d.*.
3. **(3 pts)** Soient x et y deux réels dans $]0,1[$. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
f(xy) &\leq f(x)f(y) \\
\Longleftrightarrow 1 - (1-xy)^m &\leq (1-(1-x)^m)(1-(1-y)^m) \\
\Longleftrightarrow 1 - (1-(1-\alpha)(1-\beta))^m &\leq (1-\alpha^m)(1-\beta^m) \qquad \begin{array}{c}\text{en posant } \binom{\alpha}{\beta} := \binom{1-x}{1-y} \\ \text{(observer que } (\alpha,\beta) \in \left]0,1\right[^2)\end{array} \\
\Longleftrightarrow 1 - (1-(1-\alpha-\beta+\alpha\beta))^m &\leq 1 - \alpha^m - \beta^m + \alpha^m\beta^m \\
\Longleftrightarrow (\alpha+\beta-\alpha\beta)^m &\geq \alpha^m + \beta^m - \alpha^m\beta^m \\
\Longleftrightarrow \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} - 1\right)^m &\geq \frac{1}{\beta^m} + \frac{1}{\alpha^m} - 1 \qquad \begin{array}{c}\text{en divisant par } \alpha^m\beta^m \\ \text{(qui est bien strictement positif)}\end{array} \\
\Longleftrightarrow \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - 1\right)^m &\geq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^m + \left(\frac{1}{\beta}\right)^m - 1, \qquad \begin{array}{c}\text{ce qui découle de l'inégalité} \\ \text{de la question précédente} \\ \text{où l'où a remplacé } \gamma \text{ par } m, \\ a \text{ par } \frac{1}{\alpha} \text{ et } b \text{ par } \frac{1}{\beta}.\end{array}
\end{aligned}$$

4. **(3 pts)** Soit $\ell \geq 1$ un entier. On a les équivalences

$$\begin{array}{rcl} (1-\lambda^m)^\ell + \left(1-\mu^\ell\right)^m & \geq & 1 \\ \iff (1-(1-\mu)^m)^\ell & \geq & 1-\left(1-\mu^\ell\right)^m \qquad \text{car } \lambda = 1-\mu \\ \iff f(\mu)^\ell & \geq & f\left(\mu^\ell\right). \end{array}$$

Montrons cette dernière inégalité par récurrence sur ℓ. Pour tout entier $L \geq 1$, notons P_L la proposition $f\left(\mu^L\right) \leq f(\mu)^L$.

L'inégalité P_1 équivaut à $f\left(\mu^1\right) \leq f(\mu)^1$, ce qui est vrai (on a égalité).

Soit $L \geq 1$ un entier tel que P_L. Montrons P_{L+1}. La question précédente où l'on a remplacé x par μ et y par μ^L donne

$$f\left(\mu \cdot \mu^L\right) \leq \underbrace{f(\mu)}_{\substack{\geq 0 \text{ d'après} \\ \text{la question 1}}} \underbrace{f\left(\mu^L\right)}_{\leq f(\mu)^L \text{ d'après} P_L} \leq f(\mu) f(\mu)^L = f(\mu)^{L+1}, \text{ d'où } P_{L+1}.$$

On a donc montré $\forall L \in \mathbf{N}^*,\ P_L$, d'où (en remplaçant L par ℓ) l'inégalité P_ℓ, *c. q. f. d.*.