Devoir surveillé 5

samedi 23 février 2012

La calculatrice est interdite.

Cours

1. *Que dénotent les symboles* 0 *et* 1 *?*
2. *Soit* W *un magma dont la loi est noté* $\times$*. Définir l'associativité de* $\times$*, la commutativité de* $\times$ *et l'inversibilité d'un élément de* W*.*
3. *Définir un groupe, un sous-groupe, un morphisme de groupes. Donner un critère pour être un sous-groupe d'un groupe donné.*
4. *Énoncer l'axiome de récurrence, le théorème de récurrence avec deux prédécesseurs ainsi que le théorème de récurrence forte.*
5. *Calculer* $\sum_{q=1}^{n} c^q$ *pour tout* $(c, n) \in \mathbf{C} \times \mathbf{N}$*.*
6. *Soient* A *et* B *deux ensembles finis. On admet que* $A \cup B$ *est fini. Montrer que* $\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card}(A \cap B)$*.*

Exercice 1. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $S_n := \sum_{b=1}^{n} \frac{1}{n+b}$.

1. *Calculer* S_0*,* S_1*,* S_2 *et* S_3*.*
2. *Montrer* $\forall w \in \mathbf{N}^*,\ S_w - S_{w-1} = \frac{1}{(2w-1)2w}$*.*
3. *En déduire* $\forall N \in \mathbf{N},\ -S_N = \sum_{p=1}^{2N} \frac{(-1)^p}{p}$*.*

Exercice 2.

1. *Simplifier* $\sum_{k=1}^{42} \binom{42}{k} 18^k$*.*
2. *Simplifier* $\sum_{a=2}^{18} a \binom{18}{a}$*.*
3. *Soient* $p \leq \delta$ *deux entiers naturels. Montrer l'égalité* $\sum_{x=p}^{\delta} \binom{x}{p} = \binom{\delta+1}{p+1}$*.*

Exercice 3. Soit m un entier naturel non nul. On note $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ t & \longmapsto & 1-(1-t)^m \end{array} \right.$.

1. *Montrer que la fonction* f *est bien définie.*
2. *Soient* $a \geq 1$ *et* $b \geq 1$ *deux réels et* γ *un entier naturel. Montrer la comparaison* $(a+b-1)^\gamma \geq a^\gamma + b^\gamma - 1^\gamma$*.* (Hint : raisonner par récurrence)
3. *Montrer que* $f(xy) \leq f(x) f(y)$ *pour tout* $(x, y) \in]0,1[^2$*.* (Hint : raisonner par équivalences, poser $\alpha := 1 - x$ et $\beta := 1 - y$ et utiliser la question précédente en remplaçant a par $\frac{1}{\alpha}$ et b par $\frac{1}{\beta}$.)
4. *Soient* λ *et* μ *deux réels dans* $[0,1]$ *de somme* 1*. Montrer la comparaison* $(1-\lambda^m)^\ell + \left(1-\mu^\ell\right)^m \geq 1$ *pour tout entier* $\ell \geq 1$*.* (Hint : utiliser la question précédente et raisonner par récurrence sur ℓ.)