Devoir surveillé 4

samedi 26 janvier 2012

Solution proposée.

Premier groupe.

1. Puisque $\arccos + \arcsin = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\begin{aligned}
& \cos(\arccos\alpha - \arcsin\alpha) - \sin(\arccos\alpha - \arcsin\alpha) \\
= & \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\arcsin\alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\arcsin\alpha\right) \\
= & \sin(2\arcsin\alpha) - \cos(2\arcsin\alpha) \\
= & 2(\sin\arcsin\alpha)\cos\arcsin\alpha - \left(1 - 2\sin^2\arcsin\alpha\right) \\
= & 2\alpha\sqrt{1-\alpha^2} - 1 + 2\alpha^2
\end{aligned}$$

(a) Abrégeons $\sigma := \arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13}$. Commençons par calculer

$$\begin{aligned}
\sin\sigma &= \sin\left(\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13}\right) \\
&= \sin\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\times\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right) + \sin\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)\times\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right) \\
&= \frac{4}{5}\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} + \frac{5}{13}\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} \\
&= \frac{4}{5}\frac{\sqrt{169-25}}{13} + \frac{5}{13}\frac{\sqrt{25-16}}{5} \\
&= \frac{4}{5}\frac{12}{13} + \frac{5}{13}\frac{3}{5} \\
&= \frac{63}{65}.
\end{aligned}$$

On en déduit les implications

$$\begin{aligned}
x \text{ est solution} &\Longrightarrow x = \sin(\arcsin x) \\
&\Longrightarrow x = \sin\sigma \\
&\Longrightarrow x = \frac{63}{65}.
\end{aligned}$$

Réciproquement, $\frac{63}{65}$ est solution ssi σ est l'arcsinus de $\frac{63}{65}$, *i. e.* ssi $\left\{\begin{array}{c}\sigma\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\\ \sin\sigma = \frac{63}{65}\end{array}\right.$. Le second point a été établi plus haut, le premier résulte d'une part de la positivité des arcsinus considérés (laquelle montre $\sigma \geq 0$), d'autre part des indications (lesquelles impliquent $\sigma < 1 + 0,4 < \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}$).

Finalement, on peut affirmer que

$$x \text{ est solution ssi } x = \frac{63}{65}.$$

(b) Posons $E := e^x$. On a alors les équivalences

$$\begin{aligned}
x \text{ est solution} &\Longleftrightarrow 3\operatorname{ch}x - 2\operatorname{sh}x = 3 \\
&\Longleftrightarrow 3\left(E + \frac{1}{E}\right) - 2\left(E - \frac{1}{E}\right) = 6 \\
&\Longleftrightarrow E^2 - 6E + 5 = 0 \\
&\Longleftrightarrow (E-1)(E-5) = 0 \\
&\Longleftrightarrow E = 1 \text{ ou } E = 5 \\
&\Longleftrightarrow e^x = 1 \text{ ou } e^x = 5 \\
&\Longleftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \ln 5.
\end{aligned}$$

(c) Observer que les membres de l'équation font sens ssi $\frac{x+3}{4}>0$ et $x>0$, *i. e.* ssi $x>0$. On a par conséquent, lorque $x>0$, les équivalences

$$\begin{aligned}
x \text{ est solution} &\iff \ln\frac{x+3}{4}=\frac{\ln x+\ln 3}{2}\\
&\iff \frac{x+3}{4}=e^{\frac{\ln x+\ln 3}{2}} \text{ car exp est injective}\\
&\iff x+3=4\sqrt{e^{\ln x}e^{\ln 3}}\\
&\iff x+3=4\sqrt{3x}\\
&\iff (x+3)^2=16\,(3x) \text{ car } x+3>0\\
&\iff x^2-42x+9=0\\
&\iff (x-21)^2=\underbrace{21^2-3^2}_{=432=12^2 3}\\
&\iff x=21\pm 12\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Puisque $441>432$, les deux réels $\sqrt{441}\pm\sqrt{432}$ sont positifs, ce qui permet d'affirmer dans le cas général

$$x \text{ est solution} \iff x=3\left(7\pm 4\sqrt{3}\right).$$

(d) Tout d'abord, le réel $\arccos\frac{2\sqrt{x}}{x+1}$ fait sens ssi $\frac{2\sqrt{x}}{x+1}$ fait sens et appartient à l'ensemble $[-1,1]$ de définition de arccos. La racine fait sens ssi $x\geq 0$ et le dénominateur fait sens ssi $x\neq -1$, ces deux conditions équivalant ensemble à $x\geq 0$. Pour un tel x, on a les équivalences

$$\frac{2\sqrt{x}}{x+1}\in[-1,1] \iff \left(\frac{2\sqrt{x}}{x+1}\right)^2\leq 1 \iff 4x\leq x^2+2x+1 \iff (x-1)^2\geq 0, \text{ ce qui est vrai.}$$

On peut alors, lorsque $x\geq 0$, dérouler les équivalences :

$$\begin{aligned}
x \text{ est solution} &\iff \arccos\frac{2\sqrt{x}}{x+1}=\frac{\pi}{4}\\
&\iff \arccos\frac{2\sqrt{x}}{x+1}=\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}\\
&\iff \frac{2\sqrt{x}}{x+1}=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ car arccos est injective}\\
&\iff 2\sqrt{2x}=x+1\\
&\iff 4\,(2x)=(x+1)^2 \text{ car } x+1\geq 0\\
&\iff 8x=x^2+2x+1\\
&\iff x^2-6x+9=8\\
&\iff (x-3)^2=8\\
&\iff x=3\pm 2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Puisque les deux réels $\sqrt{9}\pm\sqrt{8}$ sont positifs, on a bien dans le cas général

$$x \text{ est solution} \iff x=3\pm 2\sqrt{2}.$$

Deuxième groupe.

1.

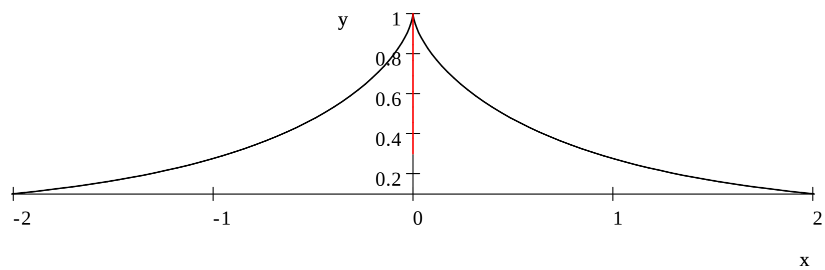
(a) i. Vu que $\text{ch}\geq 1$, le dénominteur de y ne peut s'annuler, donc $M(t)$ fait sens pour tout réel t.

Soit $t\in\mathbf{R}$. Puisque $M(-t)=\binom{-x(t)}{y(t)}$, la courbe $\operatorname{Im} M$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

ii. Soit $t \in \mathbf{R}$. On a $\binom{x'(t)}{y'(t)} = \left(\begin{smallmatrix} 1-\left(1-\operatorname{th}^2 t\right) \\ -\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t^2} \end{smallmatrix}\right) = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}\binom{\operatorname{sh} t}{-1}$, qui s'annule ssi $\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t} = 0$ ou si $\binom{\operatorname{sh} t}{-1} = \binom{0}{0}$; la seconde condition étant fausse, le point $M(t)$ est stationnaire ssi $\operatorname{sh} t = 0$, *i. e.* ssi $t = 0$.

Soit $p \in \mathbf{R}^*$. Le vecteur vitesse normalisé en p est $\frac{M'(p)}{|M'(p)|} = \frac{(\operatorname{sh} p, -1)}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 p+1}}$ qui tend vers $(0, -1)$ lorsque $p \to 0$, d'où une tangente verticale en $M(0) = (0, 1)$

iii. Cette courbe s'appelle une *tractrice* pour une raison expliquée à la question b.



(b) i. $\mathcal{T}$ est dirigée par le vecteur $M'(\delta) = \frac{\operatorname{sh} \delta}{\operatorname{ch}^2 \delta}\binom{\operatorname{sh} \delta}{-1}$, donc a pour vecteur normal $\binom{1}{\operatorname{sh} \delta}$; comme elle passe par le point $\binom{x(\delta)}{y(\delta)}$, elle a pour équation $1 \times x + (\operatorname{sh} \delta) \times y = \underbrace{1 \times x(\delta) + (\operatorname{sh} \delta) \times y(\delta)}_{=\delta - \operatorname{th} \delta + \frac{\operatorname{sh} \delta}{\operatorname{ch} \delta} = \delta}$, *i. e.* $y \operatorname{sh} \delta + x = \delta$, *c. q. f. d.*.

ii. L'ordonnée de I est nulle ; notons i son abscisse. Puisque $I \in \mathcal{T}$, ses coordonnées vérifient l'équation ci-dessus, d'où $i = t$. Finalement, $I = (t, 0)$.

iii. On a

$$IM(t)^2 = (x(t) - t)^2 + (y(t) - 0)^2 = \operatorname{th}^2 t + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} = \frac{\operatorname{sh}^2 + 1}{\operatorname{ch}^2 t} = 1,$$

ce qui montre que la distance $IM(t)$ vaut constamment 1.

2. (a) Soit $t \in \mathbf{R}$: seul le dénominateur t^2 dans $y(t)$ pose problème, donc $M(t)$ fait sens ssi $t \neq 0$. Ainsi, M est définie sur $\mathbf{R}^*$ et possède une branche infinie en 0.

(b) Soit $t \in \mathbf{R}$. On a $\binom{x'(t)}{y'(t)} = \left(\begin{smallmatrix} 2(1+t) \\ 2\left(1+\frac{1}{t^3}\right) \end{smallmatrix}\right) = 2\left(\begin{smallmatrix} 1+t \\ \frac{t^3+1}{t^3} \end{smallmatrix}\right) = 2(t+1)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \frac{t^2-t+1}{t^3} \end{smallmatrix}\right)$, donc le réel $x'(t)$ est du signe de $t+1$; puisque par ailleurs $t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, le réel $y'(t)$ est du signe de $\frac{t+1}{t^3}$, *i. e.* de $t(t+1)$. On en déduit le tableau de variations :

t	$-\infty$		-1		0		$\frac{\pi}{4}$
$x(t)$	∞	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty \parallel$	$\nearrow$	∞

.

(c) Soit $s \in \mathbf{R}$. On a les équivalences

$$M(s) \text{ est sur l'axe des abscisses} \iff y(s) = 0 \iff 2s - \frac{1}{s^2} = 0 \iff s = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Alors $x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = 2\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 = \sqrt[3]{4} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \simeq 2,2$. L'intersection cherchée est donc réduite au singleton contenant le point $\left(\sqrt[3]{4} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, 0\right)$.

La pente de la tangente en ce point est $\frac{y'\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)}{x'\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + 1}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3} = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} + 2 \simeq 1,7$, donc une équation de cette tangente est $y = \left(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} + 2\right)\left(x - \sqrt[3]{4} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$. Pour obtenir la forme voulue, *i. e.* une ordonnée à l'origine valant $\sqrt[3]{2} - \frac{5}{\sqrt[3]{2}} - 1 \simeq -3,7$, on développe (notons $\rho := \sqrt[3]{2}$ et utilisons la simplification $\rho^3 = 2$)

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} + 2\right)\left(\sqrt[3]{4} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) &= \left(\rho - \rho^2 + 2\right)\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right) \\
&= \left(\rho - \rho^2 + 2\right)\left(\rho^2 + \frac{\rho}{2}\right) \\
&= 2 + \frac{\rho^2}{2} - 2\rho - 1 + 2\rho^2 + \rho \\
&= 1 + \frac{5\rho^2}{2} - \rho \\
&= -\rho + \frac{5}{\rho} + 1, \ c.\ q.\ f.\ d..
\end{aligned}$$

(d) Soit $t \in \mathbf{R}$. Le vecteur vitesse $M'(t) = 2(t+1)\binom{1}{\frac{t^2-t+1}{t^3}}$ s'annule ssi $2(t+1) = 0$ ou si $\binom{1}{\frac{t^2-t+1}{t^3}} = \binom{0}{0}$; la seconde égalité étant fausse, t sera un point stationnaire ssi $t = -1$. L'image de ce paramètre vaut $M(-1) = \binom{-1}{-3}$.

Pour s réel autre que 0 et 1, on a $M'(s) = 2\frac{s+1}{s^3}\binom{s^3}{s^2-s+1}$, donc le vecteur vitesse normalisé en s vaut $\frac{(s^3, s^2-s+1)}{\|(s^3, s^2-s+1)\|}$ qui tend lorsque $s \to -1$ vers $\frac{(-1,3)}{\|(-1,3)\|}$, d'où une tangente de pente -3 en le point stationnaire -1.

(e) On a les équivalences

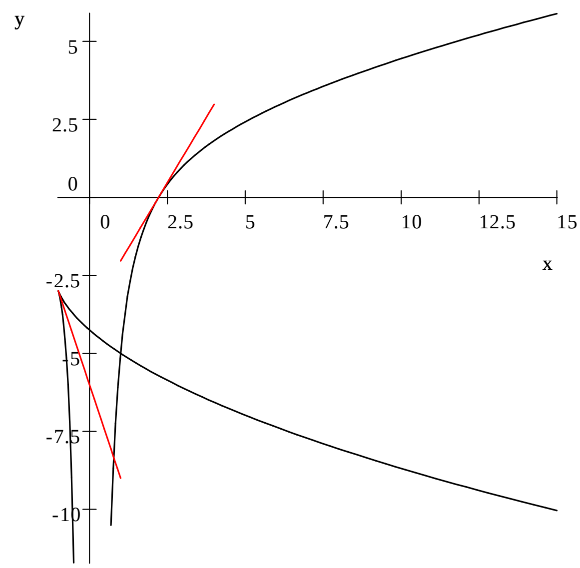
$$\begin{aligned}
M(p) = M(q) &\iff \begin{cases} x(p) = x(q) \\ y(p) = y(q) \end{cases} \iff \begin{cases} 2p + p^2 = 2q + q^2 \\ 2p - \frac{1}{p^2} = 2q - \frac{1}{q^2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2(p-q) = q^2 - p^2 \\ 2(p-q) = \frac{q^2-p^2}{p^2q^2} \end{cases} \iff \begin{cases} 2 = -(q+p) \\ 2 = \frac{-(q+p)}{p^2q^2} \end{cases} \quad \text{car } p - q \neq 0 \\
&\iff \begin{cases} p + q = -2 \\ 2 = \frac{2}{p^2q^2} \end{cases} \iff \begin{cases} p + q = -2 \\ (pq)^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} p + q = -2 \\ pq = \pm 1 \end{cases} \\
&\iff \left\{\text{ou} \begin{array}{c} p + q = -2 \text{ et } pq = 1 \\ p + q = -2 \text{ et } pq = -1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\text{ou} \begin{array}{c} p \text{ et } q \text{ sont racines du trinôme } X^2 + 2X - 1 = (X+1)^2 - 2 \\ p \text{ et } q \text{ sont racines du trinôme } X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\text{ou} \begin{array}{c} \{p, q\} = \left\{-1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}\right\} \\ \{p, q\} = \{-1\}, \text{ ce qui exclu car } p \neq q \end{array}\right. \\
&\iff \{p, q\} = \left\{-1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}\right\}.
\end{aligned}$$

Notons $r := -1 + \sqrt{2}$. D'après ce qui précède, on sait que $r^2 = 1 - 2r$, d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
x(r) &= 2r + r^2 = 1 \text{ et} \\
y(r) &= 2r - \frac{1}{r^2} = \frac{2r(1-2r) - 1}{r^2} = \frac{-4r^2 - \overbrace{(1-2r)}^{=r^2}}{r^2} = -5.
\end{aligned}$$

Ainsi, la courbe M possède un unique point double : $M(r) = (1, -5)$.

(f) On place le point d'intersection avec l'axe des abscisses, la tangente en ce point, le point double, ainsi que la tangente en le point stationnaire :



Troisième groupe. On notera Δ et Δ' respectivement les première et seconde bissectrices.

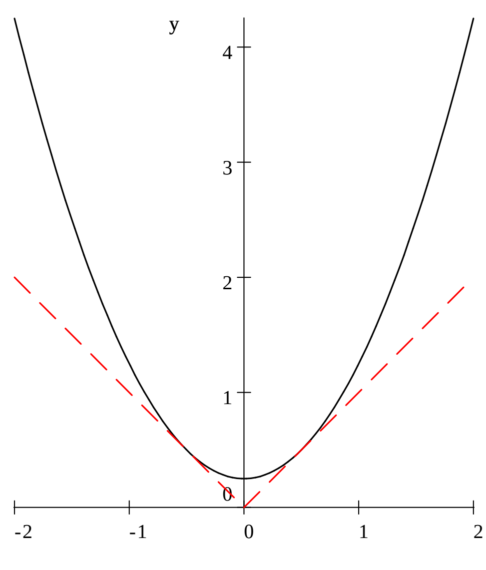
Notons p la distance entre le foyer de $\mathcal{P}$ et sa directrice. Quitte à changer le sens des ordonnées, on peut supposer que $\mathcal{P}$ est tournée vers les ordonnées positives, ce qui permet d'en avoir une équation sous la forme $x^2 = 2p\left(y - \frac{p}{2}\right)$ (on a translaté la parabole d'équation $x^2 = 2py$ verticalement de $+\frac{p}{2}$), *i. e.* $x^2 + p^2 = 2py$. Deux méthodes (au moins) sont envisageables.

1. Le point (p, p) est équidistant du foyer et de la directrice de $\mathcal{P}$, donc appartient à cette dernière et une équation de la tangente à $\mathcal{P}$ en (p, p) est $xp + p^2 = p\,(y + p)$, *i. e.* $x = y$, ce qui est une équation de Δ.
2. Déterminons les points de rencontre entre $\mathcal{P}$ et Δ. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$: on a les équivalences

$$\begin{aligned}(a,b) \in \mathcal{P} \cap \Delta \quad &\iff \quad \begin{cases} a^2 + p^2 = 2pb \\ a = b \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 + p^2 - 2pa = 0 \\ a = b \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} (a-p)^2 = 0 \\ a = b \end{cases} \iff \begin{cases} a = p \\ a = b \end{cases} \\ &\iff \quad (a,b) = (p,p)\,.\end{aligned}$$

   Ceci montre que Δ est tangente à $\mathcal{P}$ au point (p, p).

Dans les deux cas, appliquer ensuite une réflexion d'axe celui des ordonnées montre que Δ' est tangente à $\mathcal{P}$ en $(-p, p)$.



quand $p = \frac{1}{2}$