Devoir surveillé 4

samedi 26 janvier 2012

Cours (sans calculatrice).

1. *Tracer (sans démonstration) les graphes des trois fonctions* ch, sh *et* th *ainsi que de leur trois réciproques (après une restriction convenable).*
2. *Simplifier* $\sin \circ \arccos$ *et* $\cos \circ \arcsin$*, donner* $\arcsin'$ *et* $\arccos'$*, calculer* $\arcsin + \arccos$*.*
3. *Simplifier* $\operatorname{sh} \circ \operatorname{argth}$ *et donner* th'*.*

Le troisième commandement devra être respecté aux questions 2 et 3.

Premier groupe (sans calculatrice).

1. *Soit* $\alpha \in [-1, 1]$*. Simplifier* $\cos(\arccos \alpha - \arcsin \alpha) - \sin(\arccos \alpha - \arcsin \alpha)$*.*
2. *Soit* x *un réel. Résoudre les équations suivantes d'inconnue* x *:*
   (a) $\arcsin x = \arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13}$ (on pourra utiliser les majorations $\arcsin \frac{5}{13} < 0,4$ et $\arcsin \frac{4}{5} < 1$) *;*
   (b) $3 \operatorname{ch} x - 2 \operatorname{sh} x = 3$ *;*
   (c) $\ln\left(\frac{x+3}{4}\right) = \frac{\ln x + \ln 3}{2}$ *;*
   (d) $\arccos \frac{2\sqrt{x}}{x+1} = \frac{\pi}{4}$.

Deuxième groupe (sans calculatrice).

1. On considère la courbe paramétrée $M : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ t & \longmapsto & \binom{x(t) := t - \operatorname{th} t}{y(t) := \frac{1}{\operatorname{ch} t}} \end{array} \right.$.
   (a) i. *Sur quel ensemble l'application* M *est-elle définie ? La trajectoire de* M *possède-t-elle un/des axe(s) de symétrie ?*
   ii. *La courbe paramétrée* M *possède-t-elle des points stationnaires ? Préciser le cas échéant les éventuelles tangentes à ces points*
   iii. *Tracer la trajectoire* $\operatorname{Im} M$*.*
   (b) Soit $\delta \in \mathbf{R}$.
   i. *Montrer qu'une équation de la tangente* $\mathcal{T}$ *à la courbe en* $M(\delta)$ *est* $y \operatorname{sh} \delta + x = \delta$*.*
   ii. *Donner les coordonnées du point* I *d'intersection de* $\mathcal{T}$ *avec l'axe des abscisses.*
   iii. *En déduire que la distance* $IM(\delta)$ *ne dépend pas de* δ*.*
2. On considère la courbe paramétrée $M : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ t & \longmapsto & \binom{x(t) := 2t + t^2}{y(t) := 2t - \frac{1}{t^2}} \end{array} \right.$.
   (a) *Sur quel ensemble l'application* M *est-elle définie ? La trajectoire de* M *admet-elle des branches infinies ? Si oui en quel(s) paramètre(s) ?*
   (b) *Décrire (en justifiant) les variations de* x *et* y *dans un tableau.*
   (c) *Déterminer l'intersection de la courbe* $\operatorname{Im} M$ *avec l'axe des abscisses et montrer que la tangente en ce point a pour équation*
   $$y = \left(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} + 2\right) t + \left(\sqrt[3]{2} - \frac{5}{\sqrt[3]{2}} - 1\right).$$
   (d) *La courbe paramétrée* M *possède-t-elle des points stationnaires ? Préciser le cas échéant les éventuelles tangentes en ces points.*
   (e) *Soient* p *et* q *deux réels distincts et non nuls. Donner une condition simple pour que* $M(p) = M(q)$ *et calculer alors ce dernier point.*
   (f) *Tracer la trajectoire* $\operatorname{Im} M$ *en faisant apparaître les données remarquables des questions précédentes.*

Troisième groupe (sans calculatrice).

On considère dans le plan $\mathbf{R}^2$ *une parabole* $\mathcal{P}$ *de directrice l'axe des abscisses et de foyer d'abscisse nulle. Montrer que la première et la seconde bissectrice du plan sont tangentes à* $\mathcal{P}$ *en deux points que l'on décrira.*