Devoir surveillé 3

samedi 8 décembre 2012

Solution proposée.

Problème (dérivées).

1. arccos *est définie sur* $[-1,1]$ *et* $\arccos'$ *sur* $]-1,1[$ (le graphe de arccos possède deux (demi-)tangentes verticales en ± 1).

2. Montrons l'égalité par double inclusion.

   Par définition, chacune des parties $\mathcal{T}^-$, $\mathcal{D}$ ou $\mathcal{T}^+$ est incluse dans $\mathbf{R}^2$, donc leur réunion l'est aussi : $\mathcal{T}^- \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{T}^+ \subset \mathbf{R}^2$.

   Réciproquement, soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$. On a ou bien $a+b<0$ (auquel cas $(a,b) \in \mathcal{T}^-$), ou bien $a+b=0$ (auquel cas $(a,b) \in \mathcal{D}$), ou bien $a+b>0$ (auquel cas $(a,b) \in \mathcal{T}^+$). Dans tous les cas, on a bien $(a,b) \in \mathcal{T}^- \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{T}^+$, d'où l'inclusion $\mathbf{R}^2 \subset \mathcal{T}^- \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{T}^+$.

   Graphiquement, $\mathcal{T}^-$ est le "triangle" supérieur du plan, $\mathcal{T}^-$ le "triangle" inférieur du plan et $\mathcal{D}$ la diagaonale qui les sépare (c'est la seconde bissectrice). Les lettres $\mathcal{T}$ et $\mathcal{D}$ évoquent les mots "triangle" et "diagonale" respectivement, le signe $\pm$ en exposant rappelle le caractère supérieur/inférieur du triangle considéré.

3. Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$. Le réel $\varepsilon(a,b)$ fait sens ssi le dénominateur $|a+b|$ est non nul, *i. e.* ssi $(a,b) \notin \mathcal{D}$. La fonction ε est par conséquent définie sur $\mathbf{R}^2 \backslash \mathcal{D} = \mathcal{T}^- \cup \mathcal{T}^+$.

   Soit $(p,q) \in \mathbf{R}^2$. Le réel $\Delta(p,q)$ fait sens ssi l'argument $\frac{1-pq}{\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}}$ de l'arc cosinus fait sens et appartient à $[-1,1]$. Cet argument fait sens ssi les dénominateurs font sens et ne s'annulent pas, *i. e.* ssi $\begin{cases} 1+p^2>0 \\ 1+q^2>0 \end{cases}$, ce qui est vrai. Par ailleurs, on a les équivalences

$$\begin{aligned} & \frac{1-pq}{\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}} \in [-1,1] \\ \iff & \left(\frac{1-pq}{\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}}\right)^2 \leq 1 \\ \iff & (1-pq)^2 \leq \left(1+p^2\right)\left(1+q^2\right) \\ \iff & 1-2pq+p^2q^2 \leq 1+p^2+q^2+p^2q^2 \\ \iff & 0 \leq p^2+q^2+2pq \\ \iff & 0 \leq (p+q)^2, \text{ ce qui est vrai.} \end{aligned}$$

   Finalement, la fonction Δ est définie sur tout le plan $\mathbf{R}^2$.

4. Soit $p \in \mathbf{R}$: d'après la question 1, la dérivée de la fonction $\Delta(\cdot,q) = \arccos \frac{1-q\,\mathrm{Id}}{\sqrt{1+\mathrm{Id}^2}\sqrt{1+q^2}}$ en p fait sens ssi l'argument $\frac{1-pq}{\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2}}$ tombe dans $]-1,1[$, ce qui (d'après les équivalences ci-dessus) équivaut à $0<(p+q)^2$, *i. e.* à $p \neq -q$. La fonction $\Delta(\cdot,q)$ est donc dérivable sur $]-\infty,-q[\cup]-q,\infty[$.

5. Soit $t \in \mathbf{R}$. On a

$$\begin{aligned} \Delta(t,-t) &= \arccos \frac{1-t(-t)}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{1+(-t)^2}} \\ &= \arccos \frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}^2} \\ &= \arccos 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

6. Rappelons la définition $\arccos = \left(\cos_{|[0,\pi]}\right)^{-1}$, d'où l'on tire sur $[0,\pi]$ l'égalité $\arccos \circ \cos = \mathrm{Id} = |\cdot|$. On en déduit pour $t \in [-\pi,0]$ fixé l'égalité $\arccos(\cos t) = [\arccos \circ \cos](-t) = \mathrm{Id}(-t) = -t = |t|$.

Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On a

$$\begin{aligned}
\Delta(\tan\theta, 0) &= \arccos \frac{1 - 0\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}\sqrt{1+0^2}} \\
&= \arccos \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}}} \\
&= \arccos|\cos\theta| \\
&= \arccos\cos\theta \qquad (\text{on a } \cos\theta \geq 0 \text{ car } |\theta| < \frac{\pi}{2}) \\
&= |\theta|.
\end{aligned}$$

7. Soit $\binom{r}{s} \in \mathbf{R}^2$. Afin que l'égalité à montrer fasse sens, il s'agit tout d'abord d'observer les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\varepsilon\begin{pmatrix}\arctan r\\ \arctan s\end{pmatrix} \text{ fait sens} &\iff \arctan r + \arctan s \neq 0 \\
&\iff \arctan r \neq -\arctan s \\
&\iff \arctan r \neq \arctan(-s) \\
&\underset{\text{de arctan}}{\overset{\text{injectivité}}{\iff}} r \neq -s \\
&\iff r + s \neq 0 \\
&\iff \varepsilon\begin{pmatrix}r\\ s\end{pmatrix} \text{ fait sens.}
\end{aligned}$$

Supposons à présent $\binom{r}{s} \in \mathbf{R}^2 \backslash \mathcal{D}$. En remplaçant dans les équivalences ci-dessus respectivement "fait sens" par "$= 1$", "$\neq$" par "$>$" et "injectivité" par "stricte croissance", on obtient l'équivalence

$$\varepsilon\begin{pmatrix}\arctan r\\ \arctan s\end{pmatrix} = 1 \iff \varepsilon\begin{pmatrix}r\\ s\end{pmatrix} = 1.$$

De même, en remplaçant respectivement "$= 1$" par "$= -1$" et "$>$" par "$<$", on obtient l'équivalence

$$\varepsilon\begin{pmatrix}\arctan r\\ \arctan s\end{pmatrix} = -1 \iff \varepsilon\begin{pmatrix}r\\ s\end{pmatrix} = -1.$$

Puisque ε ne peut prendre que les deux valeurs ± 1, on peut conclure

$$\varepsilon\begin{pmatrix}\arctan r\\ \arctan s\end{pmatrix} = \varepsilon\begin{pmatrix}r\\ s\end{pmatrix}.$$

8. Soit $\binom{a}{b} \in \mathbf{R}^2 \backslash \mathcal{D}$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a}\Delta\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} &= \frac{\partial}{\partial a}\arccos\frac{1-ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}} \\
&= \arccos'\left(\frac{1-ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}\right) \times \frac{\partial}{\partial a}\frac{1-ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}.
\end{aligned}$$

Puisque $\arccos' = -\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{Id}^2}}$, il est utile de simplifier

$$\begin{aligned}
1 - \left(\frac{1-ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}\right)^2 &= 1 - \frac{(1-ab)^2}{(1+a^2)(1+b^2)} \\
&= \frac{1+a^2+b^2+a^2b^2-1+2ab-a^2b^2}{(1+a^2)(1+b^2)} \\
&= \frac{a^2+b^2+2ab}{(1+a^2)(1+b^2)} \\
&= \frac{(a+b)^2}{(1+a^2)(1+b^2)}.
\end{aligned}$$

Concernant le second facteur, il est utile de simplifier

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}\frac{1-ab}{\sqrt{1+a^2}} &= \frac{(-b)\sqrt{1+a^2}-(1-ab)\frac{2a}{2\sqrt{1+a^2}}}{\sqrt{1+a^2}^2}\\ &= \frac{-b\left(1+a^2\right)+(ab-1)\,a}{\sqrt{1+a^2}^3}\\ &= \frac{-b-ba^2+a^2b-a}{\sqrt{1+a^2}^3}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\frac{a+b}{1+a^2}.\end{aligned}$$

On déduit de ces calculs l'égalité

$$\begin{aligned}&\arccos'\left(\frac{1-ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}\right)\times\frac{\partial}{\partial a}\frac{1-ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}\\ =\ & -\frac{1}{\sqrt{\frac{(a+b)^2}{(1+a^2)(1+b^2)}}}\times\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\frac{a+b}{1+a^2}\right)\\ =\ & \frac{a+b}{|a+b|}\frac{1}{1+a^2}\\ =\ & \frac{\varepsilon\,(a,b)}{1+a^2},\ c.\ q.\ f.\ d..\end{aligned}$$

9. Soit $\binom{\lambda}{\mu}\in\mathcal{T}^+$. La question précédente affirme que $\frac{\partial}{\partial\lambda}\Delta\binom{\lambda}{\mu}=+\frac{\partial}{\partial\lambda}\arctan\lambda$, ce qui montre que la fonction $\left\{\begin{array}{ccc}]-\mu,\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R}\\ \Lambda & \longmapsto & \Delta\binom{\Lambda}{\mu}-\arctan\Lambda\end{array}\right.$ est de dérivée nulle, donc constante sur $]-\mu,\infty[$. La constante dépend *a priori* de μ, mettons $\forall\Lambda>-\mu,\ \Delta\binom{\Lambda}{\mu}-\arctan\Lambda=\delta^+(\mu)$, d'où l'existence d'une fonction δ^+ comme souhaité.

Soit $\binom{\lambda}{\mu}\in\mathcal{T}^-$. Le même raisonnement que ci-dessus montre que la fonction $\Lambda\mapsto\Delta\binom{\Lambda}{\mu}+\arctan\Lambda$ est constante sur $]-\infty,-\mu[$, ce qui s'écrit $\forall\Lambda<-\mu,\ \Delta\binom{\Lambda}{\mu}+\arctan\mu=\delta^-(\mu)$, d'où l'existence d'une fonction δ^- comme souhaité.

10. Soit $\gamma\in\mathbf{R}$.

La question précédente montre l'égalité $\Delta\binom{\cdot}{\gamma}=\arctan+\delta^+(\gamma)$ sur $]-\gamma,\infty[$. En prenant la limite en $(-\gamma)^+$ dans cette égalité, on obtient (par continuité de Δ et arctan)

$$\underbrace{\Delta\begin{pmatrix}-\gamma\\ \gamma\end{pmatrix}}_{=0\text{ d'après la question 5}} = \underbrace{\arctan(-\gamma)}_{=-\arctan\gamma}+\delta^+(\gamma)\text{, d'où }\delta^+(\gamma)=\arctan\gamma.$$

De même, en prenant la limite en $(-\gamma)^-$ dans l'égalité $\Delta\binom{\cdot}{\gamma}=-\arctan+\delta^-(\gamma)$ valide sur $]-\infty,-\gamma[$, on obtient

$$\underbrace{\Delta\begin{pmatrix}-\gamma\\ \gamma\end{pmatrix}}_{=0}=-\underbrace{\arctan(-\gamma)}_{=-\arctan\gamma}+\delta^-(\gamma)\text{, d'où }\delta^-(\gamma)=-\arctan\gamma.$$

11. Soit (u,v) dans $\mathbf{R}^2$.

Si $\binom{u}{v}\in\mathcal{T}^+$, alors les questions 9 et 10 montrent que $\Delta\binom{u}{v}=\arctan u+\arctan v$. Or on a $\varepsilon\binom{\arctan u}{\arctan v}\overset{\text{question 7}}{=}\varepsilon\binom{u}{v}\overset{u+v>0}{=}1$, d'où l'on tire $|\arctan u+\arctan v|=\arctan u+\arctan v=\Delta\binom{u}{v}$.

Si $\binom{u}{v}\in\mathcal{T}^-$, alors les questions 9 et 10 montrent que $\Delta\binom{u}{v}=-\arctan u-\arctan v$. Or on a $\varepsilon\binom{\arctan u}{\arctan v}\overset{\text{question 7}}{=}\varepsilon\binom{u}{v}\overset{u+v<0}{=}-1$, d'où l'on tire $|\arctan u+\arctan v|=-(\arctan u+\arctan v)=\Delta\binom{u}{v}$.

Si $\binom{u}{v}\in\mathcal{D}$, alors $\Delta\binom{u}{v}=\Delta\binom{u}{-u}=0$ d'après la question 1 et la somme $\arctan u+\arctan v$ est nulle par imparité de arctan, d'où l'égalité $|\arctan u+\arctan v|=\Delta\binom{u}{v}$.

12. Soit $\binom{u}{v} \in \mathbf{R}^2$. On considère deux réels $\binom{\alpha}{\beta} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[^2$ tels que $\binom{u=\tan\alpha}{v=\tan\beta}$, par exemple $\binom{\alpha}{\beta} := \binom{\arctan u}{\arctan v}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\Delta\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \Delta\begin{pmatrix} \tan\alpha \\ \tan\beta \end{pmatrix} \\
&= \arccos \frac{1-\tan\alpha\tan\beta}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}\sqrt{1+\tan^2\beta}} \\
&= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}}}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\beta}}}\left(1-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\right)\right) \\
&= \arccos\left(\cos\alpha\cos\beta\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\right) \\
&= \arccos\cos\left(\alpha+\beta\right) \\
&= \left|\alpha+\beta\right| \\
&= \left|\arctan u + \arctan v\right|, \text{ } c.\ q.\ f.\ d..
\end{aligned}$$

Exercices (équations différentielles).

1. *cf.* cours.
2. (a) On a les équivalences

$$f \text{ solution} \iff f' = 0 \iff f \text{ constante} \iff \exists C \in \mathbf{C},\ f = C.$$

(b) On a les équivalences

$$f \text{ solution} \iff 2f' = 0 \iff f' = 0 \iff f \text{ constante} \iff \exists C \in \mathbf{C},\ f = C.$$

(c) On a les équivalences (on peut bien diviser par cos puisqu'on est sur l'intervalle $[0,1]$)

$$\begin{aligned} f \text{ solution} &\iff 3f' = \frac{1}{\cos^2} \\ &\iff (3f)' = \tan' \\ &\iff [3f - \tan]' = 0 \\ &\iff 3f - \tan \text{ constante} \\ &\iff \exists C \in \mathbf{C},\ 3f - \tan = 3C \\ &\iff \exists C \in \mathbf{C},\ f = \frac{\tan}{3} + C. \end{aligned}$$

(d) On a les équivalences

$$\begin{aligned} f \text{ solution} &\iff 4f' = f \\ &\iff e^{-\frac{1}{4}\mathrm{Id}} f' - \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}\mathrm{Id}} f = 0 \\ &\iff \left[e^{-\frac{1}{4}\mathrm{Id}} f\right]' = 0 \\ &\iff e^{-\frac{1}{4}\mathrm{Id}} f \text{ constante} \\ &\iff \exists C \in \mathbf{C},\ e^{-\frac{1}{4}\mathrm{Id}} f = C \\ &\iff \exists C \in \mathbf{C},\ f = C e^{\frac{1}{4}\mathrm{Id}}. \end{aligned}$$

(e) On a les équivalences (on peut bien considérer tan puisqu'on est sur l'intervalle $[0,1]$)

$$\begin{aligned} f \text{ solution} &\iff 5f' = \tan \\ &\iff (5f)' = [-\ln\cos]' \\ &\iff [5f + \ln\cos]' = 0 \\ &\iff 5f + \ln\cos \text{ constante} \\ &\iff \exists C \in \mathbf{C},\ 5f + \ln\cos = 5C \\ &\iff \exists C \in \mathbf{C},\ f = C - \frac{\ln\cos}{5}. \end{aligned}$$

(f) On a les équivalences (on peut bien considérer $\frac{\mathrm{Id}}{1+\mathrm{Id}^2}$ puisque le dénominateur reste $\geq 1 > 0$)

$$\begin{aligned} f \text{ solution} &\iff 6f' = \frac{\mathrm{Id}}{1+\mathrm{Id}^2} \\ &\iff (6f)' = \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+\mathrm{Id}^2\right)\right]' \\ &\iff \left[12f - \ln\left(1+\mathrm{Id}^2\right)\right]' = 0 \\ &\iff 12f - \ln\left(1+\mathrm{Id}^2\right) \text{ constante} \\ &\iff \exists C \in \mathbf{C},\ 12f - \ln\left(1+\mathrm{Id}^2\right) = 12C \\ &\iff \exists C \in \mathbf{C},\ f = C + \frac{\ln\left(1+\mathrm{Id}^2\right)}{12}. \end{aligned}$$

(g) On a les équivalences (on peut bien considérer $\sqrt{\cdot}$ puisqu'on est sur l'intervalle $[0,1]$)

$$\begin{aligned}
f \text{ solution} &\iff 7f' = \sqrt{\cdot} \\
&\iff (7f)' = \left[\frac{2}{3}\sqrt{\cdot}^3\right]' \\
&\iff \left[21f - 2\sqrt{\cdot}^3\right]' = 0 \\
&\iff 21f - 2\sqrt{\cdot}^3 \text{ constante} \\
&\iff \exists C \in \mathbf{C},\ 21f - 2\sqrt{\cdot}^3 = 21C \\
&\iff \exists C \in \mathbf{C},\ f = C + \frac{2}{21}\sqrt{\cdot}^3.
\end{aligned}$$

(h) On a les équivalences

$$\begin{aligned}
f \text{ solution} &\iff 8f' = \frac{1}{1+\mathrm{Id}^2} \\
&\iff (8f)' = \arctan' \\
&\iff [8f - \arctan]' = 0 \\
&\iff [8f - \arctan] \text{ constante} \\
&\iff \exists C \in \mathbf{C},\ 8f - \arctan = 8C \\
&\iff \exists C \in \mathbf{C},\ f = C + \frac{1}{8}\arctan.
\end{aligned}$$

(i) L'équation équivaut à $f' + \frac{1}{3}\frac{1}{\mathrm{Id}+2}f = 4$. Une primitive du coefficient $\frac{1}{3}\frac{1}{\mathrm{Id}+2}$ en f vaut $\frac{1}{3}\ln(\mathrm{Id}+2)$, donc le facteur intégrant vaut $e^{\frac{1}{3}\ln(\mathrm{Id}+2)} = \sqrt[3]{\mathrm{Id}+2}$. On a ainsi les équivalences (on peut bien diviser par $\frac{1}{\mathrm{Id}+2}$ puisqu'on est sur l'intervalle $[0,1]$)

$$\begin{aligned}
f \text{ solution} &\iff f' + \frac{1}{3}\frac{1}{\mathrm{Id}+2}f = 4 \\
&\iff \sqrt[3]{\mathrm{Id}+2}f' + \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{Id}+2}^2}f = 4\sqrt[3]{\mathrm{Id}+2} \\
&\iff \left[\sqrt[3]{\mathrm{Id}+2}f\right]' = \left[3\sqrt[3]{\mathrm{Id}+2}^4\right]' \\
&\iff \left[\sqrt[3]{\mathrm{Id}+2}f - 3\sqrt[3]{\mathrm{Id}+2}^4\right]' \text{ constante} \\
&\iff \exists C \in \mathbf{C},\ \sqrt[3]{\mathrm{Id}+2}f - 3\sqrt[3]{\mathrm{Id}+2}^4 = C \\
&\iff \exists C \in \mathbf{C},\ f = \frac{C}{\sqrt[3]{\mathrm{Id}+2}} + 3\,\mathrm{Id}+6.
\end{aligned}$$

(j) Pas besoin ici de facteur intégrant, le premier membre est déjà de la bonne forme. On a les équivalences (on peut bien diviser par $\frac{1}{\mathrm{Id}^2-7}$ puisqu'on est sur l'intervalle $[0,1]$)

$$\begin{aligned}
f \text{ solution} &\iff \left(\mathrm{Id}^2-7\right)\times f' + 2\,\mathrm{Id}\times f = 3 \\
&\iff \left[\left(\mathrm{Id}^2-7\right)f\right]' = 3 \\
&\iff \left[\left(\mathrm{Id}^2-7\right)f - 3\,\mathrm{Id}\right]' = 0 \\
&\iff \left(\mathrm{Id}^2-7\right)f - 3\,\mathrm{Id} \text{ constante} \\
&\iff \exists C \in \mathbf{C},\ \left(\mathrm{Id}^2-7\right)f - 3\,\mathrm{Id} = C \\
&\iff \exists C \in \mathbf{C},\ f = \frac{3\,\mathrm{Id}+C}{\mathrm{Id}^2-7}.
\end{aligned}$$

(k) L'équation se réécrit $f' + 3f\tan = 4\sin(2\cdot)$. Une primitive du coefficient $3\tan$ en f vaut $-3\ln\circ\cos$, d'où le facteur intégrant $e^{-3\ln\cos} = \frac{1}{\cos^3}$. On a donc les équivalences (on peut bien diviser par cos puisqu'on est sur l'intervalle $[0,1]$)

$$\begin{aligned}
f \text{ solution} &\iff f' + 3f\tan = 4\sin(2\cdot) \\
&\iff \frac{1}{\cos^3} f' + 3\frac{\sin}{\cos^4} f = \frac{8\sin\cos}{\cos^3} \\
&\iff \left[\frac{1}{\cos^3} f\right]' = \left[\frac{8}{\cos}\right]' \\
&\iff \left[\frac{1}{\cos^3} f - \frac{8}{\cos}\right]' = 0 \\
&\iff \frac{1}{\cos^3} f - \frac{8}{\cos} \text{ constante} \\
&\iff \exists C \in \mathbf{C},\ \frac{1}{\cos^3} f - \frac{8}{\cos} = C \\
&\iff \exists C \in \mathbf{C},\ f = C\cos^3 + 8\cos^2 .
\end{aligned}$$

3. (a) On a les équivalences

$$\begin{aligned}
f \text{ solution} &\iff \begin{cases} f' = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \exists C \in \mathbf{C},\ f = C \\ f(0) = 1 \end{cases} \\
&\iff \exists C \in \mathbf{C},\ \begin{cases} f = C \\ f(0) = 1 \end{cases} \iff \exists C \in \mathbf{C},\ \begin{cases} f = C \\ C = 1 \end{cases} \iff f = 1.
\end{aligned}$$

(b) On a les équivalences

$$f \text{ solution} \iff \begin{cases} 2f' = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases} \iff f \text{ solution du 3.(a)} \iff f = 1.$$

(c) On a les équivalences

$$\begin{aligned}
f \text{ solution} &\iff \begin{cases} 3f' = \frac{1}{\cos^2} \\ f(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \exists C \in \mathbf{C},\ f = \frac{\tan}{3} + C \\ f(0) = 1 \end{cases} \iff \exists C \in \mathbf{C},\ \begin{cases} f = \frac{\tan}{3} + C \\ f(0) = 1 \end{cases} \\
&\iff \exists C \in \mathbf{C},\ \begin{cases} f = \frac{\tan}{3} + C \\ \frac{\tan 0}{3} + C = 1 \end{cases} \iff \exists C \in \mathbf{C},\ \begin{cases} f = \frac{\tan}{3} + C \\ C = 1 \end{cases} \iff f = \frac{\tan}{3} + 1.
\end{aligned}$$

(d) On a les équivalences

$$\begin{aligned}
f \text{ solution} &\iff \begin{cases} 4f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \exists C \in \mathbf{C},\ f = Ce^{\frac{1}{4}\mathrm{Id}} \\ f(0) = 1 \end{cases} \iff \exists C \in \mathbf{C},\ \begin{cases} f = Ce^{\frac{1}{4}\mathrm{Id}} \\ f(0) = 1 \end{cases} \\
&\iff \exists C \in \mathbf{C},\ \begin{cases} f = Ce^{\frac{1}{4}\mathrm{Id}} \\ Ce^{\frac{1}{4}0} = 1 \end{cases} \iff \exists C \in \mathbf{C},\ \begin{cases} f = Ce^{\frac{1}{4}\mathrm{Id}} \\ C = 1 \end{cases} \iff f = e^{\frac{1}{4}\mathrm{Id}}.
\end{aligned}$$

(e) On a les équivalences

$$\begin{aligned}
f \text{ solution} &\iff \begin{cases} 5f' = \tan \\ f(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \exists C \in \mathbf{C},\ f = C - \frac{\ln\cos}{5} \\ f(0) = 1 \end{cases} \iff \exists C \in \mathbf{C},\ \begin{cases} f = C - \frac{\ln\cos}{5} \\ f(0) = 1 \end{cases} \\
&\iff \exists C \in \mathbf{C},\ \begin{cases} f = C - \frac{\ln\cos}{5} \\ C - \frac{\ln(\cos 0)}{5} = 1 \end{cases} \iff \exists C \in \mathbf{C},\ \begin{cases} f = C - \frac{\ln\cos}{5} \\ C = 1 \end{cases} \iff f = 1 - \frac{1}{5}\ln\cos .
\end{aligned}$$

(f) On a les équivalences

$$\begin{aligned}
f \text{ solution} &\iff \begin{cases} 6f' = \frac{\mathrm{Id}}{1+\mathrm{Id}^2} \\ f(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \exists C \in \mathbf{C},\ f = C - \frac{\ln\left(1+\mathrm{Id}^2\right)}{12} \\ f(0) = 1 \end{cases} \\
&\iff \exists C \in \mathbf{C},\ \begin{cases} f = C - \frac{\ln\left(1+\mathrm{Id}^2\right)}{12} \\ f(0) = 1 \end{cases} \iff \exists C \in \mathbf{C},\ \begin{cases} f = C - \frac{\ln\left(1+\mathrm{Id}^2\right)}{12} \\ C - \frac{\ln\left(1+0^2\right)}{12} = 1 \end{cases} \\
&\iff \exists C \in \mathbf{C},\ \begin{cases} f = C - \frac{\ln\left(1+\mathrm{Id}^2\right)}{12} \\ C = 1 \end{cases} \iff f = 1 - \frac{1}{12}\ln\left(1+\mathrm{Id}^2\right).
\end{aligned}$$

(g) On a les équivalences

$$f \text{ solution} \iff \left\{\begin{array}{c} 7f' = \sqrt{\cdot} \\ f(0) = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} \exists C \in \mathbf{C},\ f = C + \frac{2}{21}\sqrt{\cdot}^3 \\ f(0) = 1 \end{array}\right. \iff \exists C \in \mathbf{C},\ \left\{\begin{array}{c} f = C + \frac{2}{21}\sqrt{\cdot}^3 \\ f(0) = 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \exists C \in \mathbf{C},\ \left\{\begin{array}{c} f = C + \frac{2}{21}\sqrt{\cdot}^3 \\ C + \frac{2}{21}\sqrt{0}^3 = 1 \end{array}\right. \iff \exists C \in \mathbf{C},\ \left\{\begin{array}{c} f = C + \frac{2}{21}\sqrt{\cdot}^3 \\ C = 1 \end{array}\right. \iff f = 1 + \frac{2}{21}\sqrt{\cdot}^3.$$

(h) On a les équivalences

$$f \text{ solution} \iff \left\{\begin{array}{c} 8f' = \frac{1}{1+\mathrm{Id}^2} \\ f(0) = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} \exists C \in \mathbf{C},\ f = C + \frac{1}{8}\arctan \\ f(0) = 1 \end{array}\right. \iff \exists C \in \mathbf{C},\ \left\{\begin{array}{c} f = C + \frac{1}{8}\arctan \\ f(0) = 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \exists C \in \mathbf{C},\ \left\{\begin{array}{c} f = C + \frac{1}{8}\arctan \\ C + \frac{1}{8}\arctan 0 = 1 \end{array}\right. \iff \exists C \in \mathbf{C},\ \left\{\begin{array}{c} f = C + \frac{1}{8}\arctan \\ C = 1 \end{array}\right. \iff f = 1 + \frac{1}{8}\arctan.$$

(i) On a les équivalences

$$f \text{ solution} \iff \left\{\begin{array}{c} 9f' + \frac{3}{\mathrm{Id}+2}f = 12 \\ f(0) = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} \exists C \in \mathbf{C},\ f = \frac{C}{\sqrt[3]{\mathrm{Id}+2}} + 6 + 3\,\mathrm{Id} \\ f(0) = 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \exists C \in \mathbf{C},\ \left\{\begin{array}{c} f = \frac{C}{\sqrt[3]{\mathrm{Id}+2}} + 6 + 3\,\mathrm{Id} \\ f(0) = 1 \end{array}\right. \iff \exists C \in \mathbf{C},\ \left\{\begin{array}{c} f = \frac{C}{\sqrt[3]{\mathrm{Id}+2}} + 6 + 3\,\mathrm{Id} \\ \frac{C}{\sqrt[3]{0+2}} + 6 + 3 \times 0 = 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \exists C \in \mathbf{C},\ \left\{\begin{array}{c} f = \frac{C}{\sqrt[3]{\mathrm{Id}+2}} + 6 + 3\,\mathrm{Id} \\ C = -5\sqrt[3]{2} \end{array}\right. \iff f = 3\,\mathrm{Id} + 6 - 5\sqrt[3]{\frac{2}{\mathrm{Id}+2}}.$$

(j) On a les équivalences

$$f \text{ solution} \iff \left\{\begin{array}{c} 10\left(\mathrm{Id}^2 - 7\right) \times f' + 20\,\mathrm{Id} \times f = 30 \\ f(0) = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} \exists C \in \mathbf{C},\ f = \frac{3\,\mathrm{Id}+C}{\mathrm{Id}^2-7} \\ f(0) = 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \exists C \in \mathbf{C},\ \left\{\begin{array}{c} f = \frac{3\,\mathrm{Id}+C}{\mathrm{Id}^2-7} \\ f(0) = 1 \end{array}\right. \iff \exists C \in \mathbf{C},\ \left\{\begin{array}{c} f = \frac{3\,\mathrm{Id}+C}{\mathrm{Id}^2-7} \\ \frac{3\cdot 0+C}{0^2-7} = 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \exists C \in \mathbf{C},\ \left\{\begin{array}{c} f = \frac{3\,\mathrm{Id}+C}{\mathrm{Id}^2-7} \\ C = -7 \end{array}\right. \iff f = \frac{3\,\mathrm{Id}-7}{\mathrm{Id}^2-7}.$$

(k) On a les équivalences

$$f \text{ solution} \iff \left\{\begin{array}{c} 11f' + 33f\tan = 44\sin(2\,\mathrm{Id}) \\ f(0) = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} \exists C \in \mathbf{C},\ f = C\cos^3 + 8\cos^2 \\ f(0) = 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \exists C \in \mathbf{C},\ \left\{\begin{array}{c} f = C\cos^3 + 8\cos^2 \\ f(0) = 1 \end{array}\right. \iff \exists C \in \mathbf{C},\ \left\{\begin{array}{c} f = C\cos^3 + 8\cos^2 \\ C\cos^3 0 + 8\cos^2 0 = 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \exists C \in \mathbf{C},\ \left\{\begin{array}{c} f = C\cos^3 + 8\cos^2 \\ C = -7 \end{array}\right. \iff f = (8 - 7\cos)\cos^2.$$

4. (a) Le polynôme caractéristique vaut $X^2 - 4 = (X-2)(X+2)$, ses racines sont ± 2, d'où les équivalences

$$\varphi \text{ solution} \iff \begin{array}{c} \exists A \in \mathbf{R} \\ \exists B \in \mathbf{R} \end{array},\ \varphi = Ae^{2\,\mathrm{Id}} + Be^{-2\,\mathrm{Id}}.$$

(b) Le polynôme caractéristique vaut $X^2 - 6X + 5 = (X-1)(X-5)$, ses racines sont 1 et 5, d'où les équivalences

$$\varphi \text{ solution} \iff \begin{array}{c} \exists A \in \mathbf{C} \\ \exists B \in \mathbf{C} \end{array},\ \varphi = A\exp + Be^{5\,\mathrm{Id}}.$$

(c) Le polynôme caractéristique vaut $X^2 - 6X + 9 = (X-3)^2$, il possède une racine double 3, d'où les équivalences

$$\varphi \text{ solution} \iff \begin{array}{c} \exists A \in \mathbf{C} \\ \exists B \in \mathbf{C} \end{array},\ \varphi = Ae^{3\,\mathrm{Id}} + B\,\mathrm{Id}\,e^{3\,\mathrm{Id}}.$$

(d) Le polynôme caractéristique vaut $X^2+4X+5=(X+2)^2+1$, ses racines sont $-2\pm i$, d'où les équivalences

$$\varphi \text{ solution} \iff \begin{array}{l}\exists A\in\mathbf{R}\\ \exists B\in\mathbf{R}\end{array},\ \varphi = Ae^{-2\operatorname{Id}}\cos + Be^{-2\operatorname{Id}}\sin.$$

(e) *cf.* TD : on conclut les équivalences

$$\varphi \text{ solution} \iff \begin{array}{l}\exists A\in\mathbf{R}\\ \exists B\in\mathbf{R}\end{array},\ \varphi = 2\exp + A\cos(2\cdot) + B\sin(2\cdot).$$

(f) Le polynôme caractéristique vaut $\chi := X^2-13iX-42=(X-6i)(X-7i)$, ses racines sont $6i$ et $7i$, d'où le plan des solutions linéaires

$$\mathbf{C}e^{6i\operatorname{Id}}+\mathbf{C}e^{7i\operatorname{Id}}.$$

Puisque l'exposant $7i$ dans le second membre est racine simple de χ, on peut chercher une solution sous la forme $e^{7i\operatorname{Id}}P\operatorname{Id}$ où P est de degré au plus 0. Soit donc a un complexe et posons $u:=ae^{7i\operatorname{Id}}\operatorname{Id}$. On a

$$\begin{aligned} u' &= ae^{7i\operatorname{Id}}(7i\operatorname{Id}+1) \quad \text{et} \quad u''=ae^{7i\operatorname{Id}}(-49\operatorname{Id}+14i)\text{, d'où}\\ u''-13iu'-42u &= ae^{7i\operatorname{Id}}((-49\operatorname{Id}+14i)-13i(7i\operatorname{Id}+1)-42\operatorname{Id})\\ &= aie^{7i\operatorname{Id}}. \end{aligned}$$

On a donc les implications

$$\begin{aligned} u \text{ solution} &\Longleftarrow u''-13iu'-42u=e^{7i\operatorname{Id}}\\ &\Longleftarrow aie^{7i\operatorname{Id}}=e^{7i\operatorname{Id}}\\ &\Longleftarrow a=-i. \end{aligned}$$

On en conclut les équivalences

$$\begin{aligned} \varphi \text{ solution} &\iff \begin{array}{l}\exists A\in\mathbf{C}\\ \exists B\in\mathbf{C}\end{array},\ \varphi = Ae^{6i\operatorname{Id}}+Be^{7i\operatorname{Id}}-ie^{7i\operatorname{Id}}\operatorname{Id}\\ &\iff \begin{array}{l}\exists A\in\mathbf{C}\\ \exists B\in\mathbf{C}\end{array},\ \forall t\in I,\ \varphi(t)=Ae^{6it}+(B-it)e^{7i\operatorname{Id}}. \end{aligned}$$

(g) Le polynôme caractéristique vaut $\chi := X^2-4X+3=(X-1)(X-3)$, ses racines sont 1 et 3, d'où le plan des solutions linéaires

$$\mathbf{R}\exp+\mathbf{R}e^{3\operatorname{Id}}.$$

Puisque l'exposant 3 dans le second membre est racine simple de χ, on peut chercher une solution sous la forme $P\operatorname{Id}$ où P est de degré au plus 3. Soient donc a,b,c,d des réels et posons $u:=a\operatorname{Id}^3+b\operatorname{Id}^2+c\operatorname{Id}+d$. On a

$$\begin{aligned} u' &= 3a\operatorname{Id}^2+2b\operatorname{Id}+c \quad \text{et} \quad u''=6a\operatorname{Id}+2b\text{, d'où}\\ u''-4u'+3u &= 3a\operatorname{Id}^3+(3b-12a)\operatorname{Id}^2+(3c-8b+6a)\operatorname{Id}+(3d-4c+2b). \end{aligned}$$

On a donc les implications

$$\begin{aligned} u \text{ solution} &\Longleftarrow u''-4u'+3u=\operatorname{Id}^3\\ &\Longleftarrow 3a\operatorname{Id}^3+(3b-12a)\operatorname{Id}^2+(3c-8b+6a)\operatorname{Id}+(3d-4c+2b)=\operatorname{Id}^3\\ &\Longleftarrow \left\{\begin{array}{c} 3a=1\\ 3b-12a=0\\ 3c-8b+6a=0\\ 3d-4c+2b=0\end{array}\right. \Longleftarrow \left\{\begin{array}{c} a=\frac{1}{3}\\ b=4a\\ c=\frac{8}{3}b-2a\\ d=\frac{4}{3}c-\frac{2}{3}b\end{array}\right. \Longleftarrow \left\{\begin{array}{c} a=\frac{1}{3}\\ b=\frac{4}{3}\\ c=\frac{26}{9}\\ d=\frac{80}{27}\end{array}\right.. \end{aligned}$$

On en conclut les équivalences

$$\varphi \text{ solution} \iff \begin{array}{l}\exists A\in\mathbf{R}\\ \exists B\in\mathbf{R}\end{array},\ \varphi = \left(\frac{1}{3}\operatorname{Id}^3+\frac{4}{3}\operatorname{Id}^2+\frac{26}{9}\operatorname{Id}+\frac{80}{27}\right)+A\exp+Be^{3\operatorname{Id}}.$$

(h) Le polynôme caractéristique vaut $\chi := X^2 + 7X - 8 = (X-1)(X+8)$, ses racines sont 1 et -8, d'où le plan des solutions linéaires

$$\mathbf{R}\exp + \mathbf{R}e^{-8\,\mathrm{Id}}.$$

Le principe de superposition nous dit que l'on obtiendra une solution en additionnant une solution α à l'équation $\alpha'' + 7\alpha' - 8\alpha = \exp$ et une solution β à l'équation $\beta'' + 7\beta' - 8\beta = -16\,\mathrm{Id}^2$.

Regardons la première équation $\alpha'' + 7\alpha' - 8\alpha = \exp$ d'inconnue α. Puisque l'exposant 1 dans le second membre est racine simple de χ, on peut chercher une solution sous la forme $\exp \times \mathrm{Id} \times P$ où P est un polynôme de degré au plus 0. Soit donc $a \in \mathbf{R}$ et posons $u := a\exp \times \mathrm{Id}$. On a

$$\begin{aligned} u' &= a\exp\times(\mathrm{Id}+1) \quad \text{et} \quad u'' = a\exp\times(\mathrm{Id}+2)\,,\ \text{d'où} \\ u'' + 7u' - 8u &= a\exp\times(\mathrm{Id}+2+7(\mathrm{Id}+1)-8\,\mathrm{Id}) \\ &= 8a\exp\,, \end{aligned}$$

d'où les implications

$$u'' + 7u' - 8u = \exp \Longleftarrow 8a\exp = \exp \Longleftarrow a = \frac{1}{8}.$$

Regardons à présent la seconde équation $\beta'' + 7\beta' - 8\beta = \mathrm{Id}^2$ d'inconnue β. Puisque l'exposant 0 dans le second membre n'est pas racine de χ, on peut cherche une solution sous la forme P où P est un polynôme de degré au plus 2. Soient donc a, b, c des réels et posons $v := a\,\mathrm{Id}^2 + b\,\mathrm{Id} + c$. On a

$$\begin{aligned} u'' + 7u' - 8u &= 2a + 7(2a\,\mathrm{Id} + b) - 8\left(a\,\mathrm{Id}^2 + b\,\mathrm{Id} + c\right) \\ &= -8a\,\mathrm{Id}^2 + 2(7a-4b)\,\mathrm{Id} + (2a+7b-8c)\,, \end{aligned}$$

d'où les implications

$$\begin{aligned} u'' + 7u' - 8u = -16\,\mathrm{Id}^2 &\Longleftarrow -8a\,\mathrm{Id}^2 + 2(7a-4b)\,\mathrm{Id} + (2a+7b-8c) = -16\,\mathrm{Id}^2 \\ &\Longleftarrow \left\{\begin{array}{c} -8a = -16 \\ 7a - 4b = 0 \\ 2a + 7b - 8c = 0 \end{array}\right. \Longleftarrow \left\{\begin{array}{c} a = 2 \\ b = \frac{7}{2} \\ c = \frac{57}{16} \end{array}\right. . \end{aligned}$$

On en conclut les équivalences

$$\begin{aligned} \varphi \text{ solution} &\Longleftrightarrow \begin{array}{c} \exists A \in \mathbf{R} \\ \exists B \in \mathbf{R} \end{array},\ \varphi = A\exp + Be^{-8\,\mathrm{Id}} + \frac{1}{8}\exp\times\mathrm{Id} + \left(2\,\mathrm{Id}^2 + \frac{7}{2}\,\mathrm{Id} + \frac{57}{16}\right) \\ &\Longleftrightarrow \begin{array}{c} \exists A \in \mathbf{R} \\ \exists B \in \mathbf{R} \end{array},\ \forall t \in I,\ \varphi(t) = 2t^2 + \frac{7}{2}t + \frac{57}{16} + \left(A + \frac{t}{8}\right)e^t + Be^{-8t}. \end{aligned}$$

5. Tous les problèmes de Cauchy font sens car l'intervalle I contient le point 0 où l'on impose les conditions intiales.

Au lieu, comme à la question 3, de garder l'égalité "$f = \cdots$" tout le long de la résolution de l'équation donnée par les conditions initiales, nous allons cette fois (afin d'alléger la rédaction) traiter cette résolution à part puis l'incorporer dans les équivalences. À cette fin, si $\clubsuit$ désigne une lettre de sous-question à la question 4 (entre a et h) et si λ et μ dénotent des scalaires, on notera ${}^{\clubsuit}S_\mu^\lambda$ la solution trouvée à la question 4.($\clubsuit$) où l'on a remplacé les "constantes" (A, B) par (λ, μ), de sorte à pouvoir disposer de l'équivalence

$$\varphi \text{ solution de l'équation de la question 4.}(\clubsuit) \Longleftrightarrow \begin{array}{c} \exists A \in \mathbf{K} \\ \exists B \in \mathbf{K} \end{array},\ \varphi = {}^{\clubsuit}S_B^A,$$

d'où il résultera les équivalences

$$\varphi \text{ solution de l'équation de la question 5.}(\clubsuit) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \varphi \text{ solution de l'équation de la question 4.}(\clubsuit) \\ \varphi(0) = 1 \text{ et } \varphi'(0) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \begin{array}{c} \exists A \in \mathbf{K} \\ \exists B \in \mathbf{K} \end{array},\ \varphi = {}^{\clubsuit}S_B^A \\ \varphi(0) = 1 \text{ et } \varphi'(0) = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \begin{array}{c} \exists A \in \mathbf{K} \\ \exists B \in \mathbf{K} \end{array} \left\{\begin{array}{c} \varphi = {}^{\clubsuit}S_B^A \\ \varphi(0) = 1 \\ \varphi'(0) = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \begin{array}{c} \exists A \in \mathbf{K} \\ \exists B \in \mathbf{K} \end{array} \left\{\begin{array}{c} \varphi = {}^{\clubsuit}S_B^A \\ {}^{\clubsuit}S_B^A(0) = 1 \\ {}^{\clubsuit}S_B^{A\prime}(0) = 0 \end{array}\right. .$$

Il ne restera ainsi plus qu'à résoudre, pour chaque question 5.($\clubsuit$), le système $\left\{\begin{array}{c} {}^{\clubsuit}S_B^A(0) = 1 \\ {}^{\clubsuit}S_B^{A\prime}(0) = 0 \end{array}\right.$ d'inconnue $(A, B) \in \mathbf{K}^2$ puis à remplacer ce dernier par les égalités trouvées $\left\{\begin{array}{c} A = \cdots \\ B = \cdots \end{array}\right.$.

(a) Soient A et B deux réels. On a ${}^{a}S_{B}^{A} = Ae^{2\,\mathrm{Id}} + Be^{-2\,\mathrm{Id}}$, d'où les équivalences

$$\left\{\begin{array}{l} {}^{a}S_{B}^{A}(0) = 1 \\ {}^{a}S_{B}^{A\prime}(0) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} Ae^{2\cdot 0} + Be^{-2\cdot 0} = 1 \\ 2Ae^{2\cdot 0} - 2Be^{-2\cdot 0} = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} A + B = 1 \\ A - B = 0 \end{array}\right. \iff A = B = \frac{1}{2}.$$

Il en résulte les équivalences

$$\varphi \text{ solution} \iff \begin{array}{l} \exists A \in \mathbf{R} \\ \exists B \in \mathbf{R} \end{array} \left\{\begin{array}{c} \varphi = {}^{a}S_{B}^{A} \\ {}^{a}S_{B}^{A}(0) = 1 \\ {}^{a}S_{B}^{A\prime}(0) = 0 \end{array}\right. \iff \begin{array}{l} \exists A \in \mathbf{R} \\ \exists B \in \mathbf{R} \end{array} \left\{\begin{array}{c} \varphi = Ae^{2\,\mathrm{Id}} + Be^{-2\,\mathrm{Id}} \\ A = B = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$
$$\iff \varphi = \frac{e^{2\,\mathrm{Id}} + e^{-2\,\mathrm{Id}}}{2} = \operatorname{ch}(2\cdot).$$

(b) Soient A et B deux complexes. On a ${}^{b}S_{B}^{A} = A\exp + Be^{5\,\mathrm{Id}}$, d'où les équivalences

$$\left\{\begin{array}{l} {}^{b}S_{B}^{A}(0) = 1 \\ {}^{b}S_{B}^{A\prime}(0) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} Ae^{2\cdot 0} + Be^{5\cdot 0} = 1 \\ 2Ae^{2\cdot 0} + 5Be^{5\cdot 0} = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} A + B = 1 \\ 2A + 5B = 0 \end{array}\right. \iff A = \frac{5}{3} \text{ et } B = -\frac{2}{3}.$$

Il en résulte les équivalences

$$\varphi \text{ solution} \iff \begin{array}{l} \exists A \in \mathbf{C} \\ \exists B \in \mathbf{C} \end{array} \left\{\begin{array}{c} \varphi = {}^{b}S_{B}^{A} \\ {}^{b}S_{B}^{A}(0) = 1 \\ {}^{b}S_{B}^{A\prime}(0) = 0 \end{array}\right. \iff \begin{array}{l} \exists A \in \mathbf{C} \\ \exists B \in \mathbf{C} \end{array} , \left\{\begin{array}{c} \varphi = A\exp + Be^{5\,\mathrm{Id}} \\ A = \frac{5}{3} \text{ et } B = -\frac{2}{3} \end{array}\right.$$
$$\iff \varphi = \frac{5e^{2\,\mathrm{Id}} - 2e^{5\,\mathrm{Id}}}{3}.$$

(c) Soient A et B deux complexes. On a ${}^{c}S_{B}^{A} = e^{3\,\mathrm{Id}}(A + B\,\mathrm{Id})$, d'où les équivalences

$$\left\{\begin{array}{l} {}^{c}S_{B}^{A}(0) = 1 \\ {}^{c}S_{B}^{A\prime}(0) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} e^{3\cdot 0}(A + B0) = 1 \\ e^{3\cdot 0}((3A + B) + 3B0) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} A = 1 \\ 3A + B = 0 \end{array}\right. \iff A = 1 \text{ et } B = -3.$$

Il en résulte les équivalences

$$\varphi \text{ solution} \iff \begin{array}{l} \exists A \in \mathbf{C} \\ \exists B \in \mathbf{C} \end{array} \left\{\begin{array}{c} \varphi = {}^{c}S_{B}^{A} \\ {}^{c}S_{B}^{A}(0) = 1 \\ {}^{c}S_{B}^{A\prime}(0) = 0 \end{array}\right. \iff \begin{array}{l} \exists A \in \mathbf{C} \\ \exists B \in \mathbf{C} \end{array} , \left\{\begin{array}{c} \varphi = e^{3\,\mathrm{Id}}(A + B\,\mathrm{Id}) \\ A = 1 \text{ et } B = -3 \end{array}\right.$$
$$\iff \varphi = e^{3\,\mathrm{Id}}(1 - 3\,\mathrm{Id}).$$

(d) Soient A et B deux réels. On a ${}^{d}S_{B}^{A} = Ae^{-2\,\mathrm{Id}}\cos + Be^{-2\,\mathrm{Id}}\sin$, d'où les équivalences

$$\left\{\begin{array}{l} {}^{d}S_{B}^{A}(0) = 1 \\ {}^{d}S_{B}^{A\prime}(0) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} Ae^{-2\cdot 0}\cos 0 + Be^{-2\cdot 0}\sin 0 = 1 \\ (B - 2A)\cos 0 - (A + 2B)\sin 0 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} A + 0 = 1 \\ (B - 2A) - 0 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} A = 1 \\ B = 2 \end{array}\right. .$$

Il en résulte les équivalences

$$\varphi \text{ solution} \iff \begin{array}{l} \exists A \in \mathbf{R} \\ \exists B \in \mathbf{R} \end{array} \left\{\begin{array}{c} \varphi = {}^{d}S_{B}^{A} \\ {}^{d}S_{B}^{A}(0) = 1 \\ {}^{d}S_{B}^{A\prime}(0) = 0 \end{array}\right. \iff \begin{array}{l} \exists A \in \mathbf{R} \\ \exists B \in \mathbf{R} \end{array} , \left\{\begin{array}{c} \varphi = Ae^{-2\,\mathrm{Id}}\cos + Be^{-2\,\mathrm{Id}}\sin \\ A = 1 \text{ et } B = 2 \end{array}\right.$$
$$\iff \varphi = e^{-2\,\mathrm{Id}}(\cos + 2\sin).$$

(e) Soient A et B deux réels. On a ${}^{e}S_{B}^{A} = 2\exp + A\cos(2\cdot) + B\sin(2\cdot)$, d'où les équivalences

$$\left\{\begin{array}{l} {}^{e}S_{B}^{A}(0) = 1 \\ {}^{e}S_{B}^{A\prime}(0) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2e^{0} + A\cos(2\cdot 0) + B\sin(2\cdot 0) = 1 \\ 2e^{0} - 2\sin(2\cdot 0) + 2B\cos(2\cdot 0) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2 + A = 1 \\ 2 + 2B = 0 \end{array}\right. \iff A = -1 = B.$$

Il en résulte les équivalences

$$\varphi \text{ solution} \iff \begin{array}{l} \exists A \in \mathbf{R} \\ \exists B \in \mathbf{R} \end{array} \left\{\begin{array}{c} \varphi = {}^{e}S_{B}^{A} \\ {}^{e}S_{B}^{A}(0) = 1 \\ {}^{e}S_{B}^{A\prime}(0) = 0 \end{array}\right. \iff \begin{array}{l} \exists A \in \mathbf{R} \\ \exists B \in \mathbf{R} \end{array} , \left\{\begin{array}{c} \varphi = 2\exp + A\cos(2\cdot) + B\sin(2\cdot) \\ A = -1 = B \end{array}\right.$$
$$\iff \varphi = 2\exp - \cos(2\cdot) - \sin(2\cdot).$$

(f) Soient A et B deux complexes. On a ${}^fS_B^A = Ae^{6i\,\mathrm{Id}} + (B - i\,\mathrm{Id})\,e^{7i\,\mathrm{Id}}$, d'où les équivalences

$$\left\{\begin{array}{l} {}^fS_B^A\,(0)=1 \\ {}^fS_B^{A\prime}\,(0)=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} Ae^{6i\cdot 0}+(B-i0)\,e^{7i\cdot 0}=1 \\ 6iAe^{6i\cdot 0}+(7B-i-7i0)\,e^{7i\cdot 0}=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} A+B=1 \\ 6A-7iB=1 \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -7i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff A = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -7i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -7i \end{vmatrix}} \text{ et } B = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -7i \end{vmatrix}}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} A=\frac{-1-7i}{-6-7i}=\frac{1+7i}{6+7i}=\frac{(1+7i)(6-7i)}{|6+7i|^2}=\frac{55+35i}{85}=\frac{11}{17}+\frac{7}{17}i \\ B=\frac{1-6}{-6-7i}=\frac{5}{6+7i}=\frac{5(6-7i)}{|6+7i|^2}=\frac{5(6-7i)}{85}=\frac{6}{17}-\frac{7}{17}i \end{array}\right. .$$

Il en résulte les équivalences

$$\varphi \text{ solution } \iff \begin{array}{l} \exists A\in\mathbf{C} \\ \exists B\in\mathbf{C} \end{array} \left\{\begin{array}{c} \varphi = {}^fS_B^A \\ {}^fS_B^A\,(0)=1 \\ {}^fS_B^{A\prime}\,(0)=0 \end{array}\right. \iff \begin{array}{l} \exists A\in\mathbf{C} \\ \exists B\in\mathbf{C} \end{array}, \left\{\begin{array}{c} \varphi = Ae^{6i\,\mathrm{Id}}+(B-i\,\mathrm{Id})\,e^{7i\,\mathrm{Id}} \\ A=\frac{11}{17}+\frac{7}{17}i \\ B=\frac{6}{17}-\frac{7}{17}i \end{array}\right.$$

$$\iff \varphi = \frac{11+7i}{17}e^{6i\,\mathrm{Id}} + \frac{6-7i-i\,\mathrm{Id}}{17}e^{7i\,\mathrm{Id}}.$$

(g) Soient A et B deux réels. On a ${}^gS_B^A = \left(\frac{1}{3}\,\mathrm{Id}^3+\frac{4}{3}\,\mathrm{Id}^2+\frac{26}{9}\,\mathrm{Id}+\frac{80}{27}\right) + A\exp + Be^{3\,\mathrm{Id}}$, d'où les équivalences

$$\left\{\begin{array}{l} {}^gS_B^A\,(0)=1 \\ {}^gS_B^{A\prime}\,(0)=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} \left(\frac{1}{3}0^3+\frac{4}{3}0^2+\frac{26}{9}0+\frac{80}{27}\right)+Ae^0+Be^{3\cdot 0}=1 \\ \left(0^2+\frac{8}{3}0^2+\frac{26}{9}\right)+Ae^0+3Be^{3\cdot 0}=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} A+B=-\frac{53}{27} \\ A+3B=-\frac{26}{9} \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{53}{27} \\ -\frac{26}{9} \end{pmatrix} \iff A = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{53}{27} & 1 \\ -\frac{26}{9} & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} \text{ et } B = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{53}{27} \\ 1 & -\frac{26}{9} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} A=\frac{-\frac{53}{9}+\frac{26}{9}}{3-1}=\frac{27}{2\cdot 9}=\frac{3}{2} \\ B=\frac{-\frac{26}{9}+\frac{53}{27}}{3-1}=\frac{-78+53}{2\cdot 27}=-\frac{25}{54} \end{array}\right. .$$

Il en résulte les équivalences

$$\varphi \text{ solution } \iff \begin{array}{l} \exists A\in\mathbf{R} \\ \exists B\in\mathbf{R} \end{array} \left\{\begin{array}{c} \varphi = {}^gS_B^A \\ {}^gS_B^A\,(0)=1 \\ {}^gS_B^{A\prime}\,(0)=0 \end{array}\right. \iff \begin{array}{l} \exists A\in\mathbf{R} \\ \exists B\in\mathbf{R} \end{array}, \left\{\begin{array}{c} \varphi = A\exp+Be^{3\,\mathrm{Id}} \\ +\frac{1}{3}\,\mathrm{Id}^3+\frac{4}{3}\,\mathrm{Id}^2+\frac{26}{9}\,\mathrm{Id}+\frac{80}{27} \\ A=-\frac{3}{2} \text{ et } B=-\frac{25}{54} \end{array}\right.$$

$$\iff \varphi = \left(\frac{1}{3}\,\mathrm{Id}^3+\frac{4}{3}\,\mathrm{Id}^2+\frac{26}{9}\,\mathrm{Id}+\frac{80}{27}\right) - \frac{3}{2}\exp - \frac{25}{54}e^{3\,\mathrm{Id}}.$$

(h) Soient A et B deux réels. On a ${}^hS_B^A = A\exp + Be^{-8\,\mathrm{Id}} + \frac{1}{8}\exp\times\mathrm{Id} + \left(2\,\mathrm{Id}^2+\frac{7}{2}\,\mathrm{Id}+\frac{57}{16}\right)$, d'où les équivalences

$$\left\{\begin{array}{l} {}^hS_B^A\,(0)=1 \\ {}^hS_B^{A\prime}\,(0)=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} Ae^0+Be^{-8\cdot 0}+\frac{1}{8}e^0 0+\left(2\cdot 0^2+\frac{7}{2}0+\frac{57}{16}\right)=1 \\ Ae^0-8Be^{-8\cdot 0}+\frac{1}{8}e^0\,(0+1)+\left(4\cdot 0+\frac{7}{2}\right)=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} A+B=-\frac{41}{16} \\ A-8B=-\frac{29}{8} \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{41}{16} \\ -\frac{29}{8} \end{pmatrix} \iff A = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{41}{16} & 1 \\ -\frac{29}{8} & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -8 \end{vmatrix}} \text{ et } B = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{41}{16} \\ 1 & -\frac{29}{8} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -8 \end{vmatrix}}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} A=\frac{\frac{41}{2}+\frac{29}{8}}{-8-1}=-\frac{164+29}{9\cdot 8}=-\frac{193}{72} \\ B=\frac{-\frac{29}{8}+\frac{41}{16}}{-8-1}=\frac{58-41}{9\cdot 16}=\frac{17}{144} \end{array}\right. .$$

Il en résulte les équivalences

$$\varphi \text{ solution } \iff \begin{array}{l} \exists A\in\mathbf{R} \\ \exists B\in\mathbf{R} \end{array} \left\{\begin{array}{c} \varphi = {}^hS_B^A \\ {}^hS_B^A\,(0)=1 \\ {}^hS_B^{A\prime}\,(0)=0 \end{array}\right. \iff \begin{array}{l} \exists A\in\mathbf{R} \\ \exists B\in\mathbf{R} \end{array}, \left\{\begin{array}{c} \varphi = A\exp+Be^{-8\,\mathrm{Id}} \\ +\frac{1}{8}\exp\times\mathrm{Id}+\left(2\,\mathrm{Id}^2+\frac{7}{2}\,\mathrm{Id}+\frac{57}{16}\right) \\ A=-\frac{193}{72} \text{ et } B=\frac{17}{144} \end{array}\right.$$

$$\iff \varphi = -\frac{193}{72}\exp + \frac{17}{144}e^{-8\,\mathrm{Id}} + \frac{1}{8}\exp\times\mathrm{Id} + \left(2\,\mathrm{Id}^2+\frac{7}{2}\,\mathrm{Id}+\frac{57}{16}\right).$$