Devoir surveillé 3

samedi 8 décembre 2012

La calculatrice est interdite.
Les couples seront indifféremment notés horizontalement ou verticalement.

Problème (dérivées).

On définit trois parties du plan $\mathbf{R}^2$ par

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^+ &:= \left\{(a,b) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ a+b>0\right\}, \\ \mathcal{T}^- &:= \left\{(a,b) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ a+b<0\right\}, \\ \text{et} \qquad \mathcal{D} &:= \left\{(a,b) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ a+b=0\right\}. \end{aligned}$$

ainsi que deux fonctions

$$\varepsilon : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \binom{a}{b} & \longmapsto & \frac{a+b}{|a+b|} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \binom{a}{b} & \longmapsto & \arccos \frac{1-ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}} \end{array} \right. .$$

1. *Rappeler les ensembles de définition de* arccos *et* arccos′.
2. *Montrer que* $\mathcal{T}^- \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{T}^+ = \mathbf{R}^2$, *représenter les trois parties* $\mathcal{T}^+$, $\mathcal{T}^+$ *et* $\mathcal{D}$ *et imaginer pourquoi le concepteur du sujet les a notées ainsi.*
3. *En quels points du plan* $\mathbf{R}^2$ *les fonctions* ε *et* Δ *sont-elle définies ?*
4. *Soit* $q \in \mathbf{R}$ *: en quels points de la droite* $\mathbf{R}$ *la fonction* $\Delta(\cdot, q)$ *est-elle dérivable ?*
5. *Calculer* $\Delta(t, -t)$ *pour tout réel* t.
6. *Montrer que* $\arccos \circ \cos$ *et* $|\cdot|$ *coïncident sur* $[-\pi, \pi]$ *et en déduire* $\Delta(\tan\theta, 0)$ *pour tout réel* $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
7. *Montrer l'égalité*
$$\forall \binom{r}{s} \in \mathbf{R}^2 \setminus \mathcal{D}, \ \varepsilon \binom{\arctan r}{\arctan s} = \varepsilon \binom{r}{s}.$$
8. *Montrer que*
$$\forall \binom{a}{b} \in \mathcal{T}^+ \cup \mathcal{T}^-, \ \frac{\partial}{\partial a} \left(\Delta \binom{a}{b} \right) = \frac{\varepsilon(a,b)}{1+a^2}.$$
9. *Déduire de la question 8 qu'il y a deux fonctions* δ^+ *et* δ^- *telles que*
$$\forall \binom{\lambda}{\mu} \in \mathcal{T}^+, \ \Delta \binom{\lambda}{\mu} = \arctan \lambda + \delta^+(\mu) \ \ \textit{et}$$
$$\forall \binom{x}{y} \in \mathcal{T}^-, \ \Delta \binom{x}{y} = -\arctan x + \delta^-(y).$$
10. *En utilisant la continuité de* Δ, *montrer que* $\left\{ \begin{array}{l} \delta^+ = \arctan \\ \delta^- = -\arctan \end{array} \right.$.
11. *Conclure à l'aide des questions 7, 9 et 10 que*
$$\forall \binom{u}{v} \in \mathbf{R}^2, \ \Delta \binom{u}{v} = |\arctan u + \arctan v|.$$
12. **(bonus)** *Retrouver le résultat précédent à l'aide du paramétrage* $\left\{ \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (\alpha, \beta) & \longmapsto & (\tan\alpha, \tan\beta) \end{array} \right.$.

Exercices (équations différentielles).

1. *Soit* $E : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ *une fonction dérivable telle que* $\begin{array}{c}\forall a \in \mathbf{R} \\ \forall b \in \mathbf{R}\end{array}$, $E(a+b) = E(a)\,E(b)$. *Montrer qu'il y a un complexe* λ *tel que* $E = e^{\lambda\,\mathrm{Id}}$.
2. *Soit* f *une application de* $[0,1]$ *vers* $\mathbf{C}$. *Résoudre les équations suivantes (toutes d'inconnue* f*) :*
   (a) $f' = 0$;
   (b) $2f' = 0$;
   (c) $3f' = \frac{1}{\cos^2}$;
   (d) $4f' = f$;
   (e) $5f' = \tan$;
   (f) $6f' = \frac{\mathrm{Id}}{1+\mathrm{Id}^2}$;
   (g) $7f' = \sqrt{\cdot}$;
   (h) $8f' = \frac{1}{1+\mathrm{Id}^2}$;
   (i) $9f' + \frac{3}{\mathrm{Id}+2}f = 12$;
   (j) $10\left(\mathrm{Id}^2 - 7\right) \times f' + 20\,\mathrm{Id} \times f = 30$;
   (k) $11f' + 33f\tan = 44\sin(2\,\mathrm{Id})$.
3. *Résoudre chacune des équations de la questions 2 sous la condition supplémentaire* $f(0) = 1$.
4. *Soit* $\mathbf{K} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$, *soit* I *un intervalle infini de* $\mathbf{R}$ *contenant* 0, *soit* $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{K}$. *Résoudre les équations suivantes (toutes d'inconnue* φ*) :*
   (a) $\varphi'' = 4\varphi$ *et* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$;
   (b) $\varphi'' - 6\varphi' + 5\varphi = 0$ *et* $\mathbf{K} = \mathbf{C}$;
   (c) $\varphi'' - 6\varphi' + 9\varphi = 0$ *et* $\mathbf{K} = \mathbf{C}$;
   (d) $\varphi'' + 4\varphi' + 5\varphi = 0$ *et* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$;
   (e) $\varphi'' + 4\varphi = 10\exp$ *et* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$;
   (f) $\varphi'' - 13i\varphi' - 42\varphi = e^{7i\,\mathrm{Id}}$ *et* $\mathbf{K} = \mathbf{C}$;
   (g) $\varphi'' - 4\varphi' + 3\varphi = \mathrm{Id}^3$ *et* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$;
   (h) $\varphi'' + 7\varphi' - 8\varphi = \exp -16\,\mathrm{Id}^2$ *et* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$;
5. *Résoudre chacune des équations de la question 4 sous les conditions supplémentaires* $\left\{\begin{array}{l}\varphi(0) = 1 \\ \varphi'(0) = 0\end{array}\right.$.