Exercices.

1. (a) Considérons une base orthonormée formée de trois vecteurs a, b, c. On donne deux vecteurs $u := (r, s, t)$ et $v := (\rho, \sigma, \tau)$ dont les coordonnées sont exprimées dans la base considérée. Alors

$$\begin{array}{rcll}
u \cdot v & = & (ra + sb + tc) \cdot (\rho a + \sigma b + \tau c) & \text{(définition des coordonnées dans une base)} \\
& = & \left[\begin{array}{r} r\rho\,(a \cdot a) + r\sigma\,(a \cdot b) + r\tau\,(a \cdot c) \\ +s\rho\,(b \cdot a) + s\sigma\,(b \cdot b) + s\tau\,(b \cdot c) \\ +t\rho\,(ac\cdot) + t\sigma\,(c \cdot b) + t\tau\,(c \cdot c) \end{array} \right. & \text{(bilinéairité du produit scalaire)} \\
& = & \left[\begin{array}{r} r\rho 1 + r\sigma 0 + r\tau 0 \\ +s\rho 0 + s\sigma 1 + s\tau 0 \\ +t\rho 0 + t\sigma 0 + t\tau 1 \end{array} \right. & \text{(caractère orthonormé des vecteurs } a, b, c\text{)} \\
& = & r\rho + s\sigma + t\tau. &
\end{array}$$

(b) Soient trois vecteurs u, v, w. On veut montrer les égalités

$$\left\{ \begin{array}{l} u \times (v \times w) = (u \cdot w)\, v - (u \cdot v)\, w \\ (u \times v) \times w = (u \cdot w)\, v - (v \cdot w)\, u \end{array} \right. .$$

On considère pour cela sur les coordonnées des vecteurs u, v, w dans une base orthonormée directe, mettons $u = (a, \alpha, A)$, $v = (b, \beta, B)$ et $w = (c, \gamma, C)$. On a alors d'une part

$$\begin{array}{rcl}
u \times (v \times w) & = & \begin{pmatrix} a \\ \alpha \\ A \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} b \\ \beta \\ B \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c \\ \gamma \\ C \end{pmatrix} \right) \\
& = & \begin{pmatrix} a \\ \alpha \\ A \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta C - B\gamma \\ Bc - bC \\ b\gamma - \beta c \end{pmatrix} \\
& = & \begin{pmatrix} \alpha\,(b\gamma - \beta c) - A\,(Bc - bC) \\ A\,(\beta C - B\gamma) - a\,(b\gamma - \beta c) \\ a\,(Bc - bC) - \alpha\,(\beta C - B\gamma) \end{pmatrix} \\
& = & \begin{pmatrix} \alpha b\gamma + AbC - \alpha\beta c - ABc \\ A\beta C + a\beta c - AB\gamma - ab\gamma \\ aBc + \alpha B\gamma - abC - \alpha\beta C \end{pmatrix},
\end{array}$$

d'autre part

$$\begin{array}{rcl}
(u \cdot w)\, v - (u \cdot v)\, w & = & (ac + \alpha\gamma + AC) \begin{pmatrix} b \\ \beta \\ B \end{pmatrix} - (ab + \alpha\beta + AB) \begin{pmatrix} c \\ \gamma \\ C \end{pmatrix} \\
& = & \begin{pmatrix} \underline{abc} + \alpha b\gamma + AbC \underline{-abc} - \alpha\beta c - ABc \\ a\beta c + \underline{\alpha\beta\gamma} + A\beta C - ab\gamma \underline{-\alpha\beta\gamma} - AB\gamma \\ aBc + \alpha B\gamma + \underline{ABC} - abC - \alpha\beta C \underline{-ABC} \end{pmatrix} \\
& = & \begin{pmatrix} \alpha b\gamma + AbC - \alpha\beta c - ABc \\ a\beta c + A\beta C - ab\gamma - AB\gamma \\ aBc + \alpha B\gamma - abC - \alpha\beta C \end{pmatrix},
\end{array}$$

d'où la première égalité.

Pour la seconde, on pourrait refaire les mêmes calculs mais il est plus court de se ramener à la première égalité :

$$\begin{array}{rcll}
(u \times v) \times w & = & -w \times (u \times v) & \text{(anti-commutativité du produit vectoriel)} \\
& = & -\left((w \cdot v)\, u - (w \cdot u)\, v\right) & \text{(première égalité prouvée)} \\
& = & (u \cdot w)\, v - (v \cdot w)\, u & \text{(commutativité du produit scalaire).}
\end{array}$$

(c) Soit M dans le plan. On a les équivalences

$$\begin{array}{rcl}
3AM = 2AM & \iff & \left(3\overrightarrow{AM}\right)^2 = \left(2\overrightarrow{AM}\right)^2 \\
& \iff & \left(3\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{AM}\right) \cdot \left(3\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AM}\right) = 0 \\
& \iff & (3 - 2)\,\overrightarrow{GM} \cdot (3 + 2)\,\overrightarrow{HM} = 0
\end{array}$$

où G et H sont les barycentres de A et B pondérés respectivement par $(3,-2)$ et $(3,2)$ (figure : les points G et H sont déterminés par les égalités $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$; on vérifiera bien de la nullité des vecteurs $3\overrightarrow{AG}-2\overrightarrow{BG}$ et $3\overrightarrow{AH}+2\overrightarrow{BH}$). En introduisant le milieu O du segment $[GH]$, on peut continuer nos équivalences

$$\begin{array}{rcl} 3AM=2AM & \iff & \overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{HM}=0 \\ & \iff & \left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OG}\right)\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OH}\right)=0 \\ & \iff & \left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OG}\right)\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OG}\right)=0 \\ & \iff & \overrightarrow{OM}^2-\overrightarrow{OG}^2=0 \\ & \iff & OM=OG \\ & \iff & M \text{ est sur le cercle de centre } O \text{ et de rayon } OG. \end{array}$$

Il en résulte que le lieu cherche est le cercle de diamètre $[GH]$.

(d) Fixons un point M dans l'espace. En introduisant le milieu O du segment $[AB]$, on a les équivalences

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=3 & \iff & \left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB}\right)=3 \\ & \iff & \left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OA}\right)=3 \\ & \iff & \overrightarrow{OM}^2-\overrightarrow{OA}^2=3 \\ & \iff & OM=\sqrt{OA^2+3}. \end{array}$$

Le lieu cherché est donc le cercle de centre le milieu de AB et de rayon $\sqrt{\frac{AB^2}{4}+3}$.

(e) Notons pour tout point M de l'espace $q(M)$ la quantité AM^2+2BM^2. On a pour tous points M et G l'égalité

$$\begin{array}{rcl} q(M) & = & AM^2+2BM^2 \\ & = & \overrightarrow{AM}^2+2\overrightarrow{BM}^2 \\ & = & \left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM}\right)^2+2\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GM}\right)^2 \\ & = & \left(AG^2+2\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GM}+GM^2\right)+2\left(BG^2+2\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{GM}+GM^2\right) \\ & = & q(G)+3GM^2+\left(\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{BG}\right)\cdot\overrightarrow{GM}. \end{array}$$

Ainsi, en choisissant G de sorte à annuler $\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{BG}$ (c'est possible : définir G comme étant le barycentre des points A et B pondérés par 1 et 2 respectivement), on aura pour tout point M

$$q(M)=q(G)+3GM^2\geq q(G)$$

avec égalité si et seulement si $M=G$.

On en déduit le résultat cherché, le point M minimisant $q(M)$ étant le barycentre des points pondérés $\binom{A}{1}$ et $\binom{B}{2}$.

Dans tous ce qui suit, les points sont identifiés à leurs coordonnées dans une base orthonormée directe (du plan ou de l'espace).

2. (a) Notons nos quatre points respectivement $A:=\binom{-2}{-1}, B:=\binom{1}{1}, C:=\binom{1}{-2}, D:=\binom{4}{0}$. Un dessin suggère que ces quatre points forment un parallélogramme, ce qui découle de l'égalité des vecteurs $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=\binom{3}{2}$. L'aire cherchée vaut donc la valeur absolue du déterminant

$$\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-3-6=-9, \qquad \text{à savoir } 9.$$

(b) Notons u et v nos deux vecteurs et $\theta\in[0,\pi]$ l'angle non orienté fait par eux. On a $\|u\|=\sqrt{2+6+1}=3$, $\|v\|=\sqrt{2+6+1}=3$ et $u\cdot v=+2-6+1=-3$, d'où $\cos\theta=\frac{u\cdot v}{\|u\|\|v\|}=\frac{-3}{3\cdot3}=-\frac{1}{3}$. Il en résulte $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{1}{9}=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2$; or $\sin\theta\geq0$ puisque $\theta\in[0,\pi]$, d'où le sinus cherché : $\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(c) Appelons nos points respectivement A, B, C, D. L'aire cherchée est le sixième du volume parallélépipède de "côtés" $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$, lequel s'évalue par le déterminant

$$\begin{aligned}
\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{l} 0 \cdot 3 \cdot 2 + (-1)(-5)1 + (-2)1 \cdot 3 \\ -1 \cdot 3(-2) - 3(-5)0 - 2 \cdot 1(-1) \end{array}\right. \\
&= 5 - 6 + 6 + 2 = 7.
\end{aligned}$$

Le volume cherché vaut donc $\frac{7}{6}$.

3. (a) Fixons un point M dont on notera $\binom{x}{y}$ les coordonnées. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
4AM = 7BM &\iff 16\overrightarrow{AM}^2 = 49\overrightarrow{BM}^2 \\
&\iff 16\left((x-2)^2 + (y+1)^2\right) = 49\left((x+5)^2 + (y-3)^2\right) \\
&\iff 16\left(x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1\right) = 49\left(x^2 + 10x + 100 + y^2 - 6y + 9\right) \\
&\iff 16x^2 + 16y^2 - 64x + 32y + 80 = 49x^2 + 49y^2 + 490x - 294y + 5341 \\
&\iff 0 = 33x^2 + 33y^2 + 554x - 326y + 5261.
\end{aligned}$$

(b) Soit $P = \binom{\lambda}{\mu}$ un point du point : on a les équivalences

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 3 &\iff \begin{pmatrix} \lambda - 2 \\ \mu + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda + 5 \\ \mu - 3 \end{pmatrix} = 3 \\
&\iff (\lambda + 2)(\lambda + 5) + (\mu + 1)(\mu - 3) = 3 \\
&\iff \lambda^2 + 7\lambda + 10 + \mu^2 - 2\mu - 3 = 3 \\
&\iff \lambda^2 + \mu^2 + 7\lambda - 2\mu + 4 = 0.
\end{aligned}$$

(c) Soient $\binom{a}{b}$ les coordonnées d'un point S fixé du plan. On note $\Gamma\binom{5}{7}$ et $\Delta\binom{-3}{1}$ les deux points de l'énoncé. On a alors les équivalences

$$\begin{aligned}
S \in (\Gamma\Delta) &\iff \overrightarrow{\Delta S} \parallel \overrightarrow{\Delta\Gamma} \\
&\iff \operatorname{Det}\left(\overrightarrow{\Delta S}, \overrightarrow{\Delta\Gamma}\right) = 0 \\
&\iff \begin{vmatrix} a+3 & 8 \\ b-1 & 6 \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff 6(a+3) - 8(b-1) = 0 \\
&\iff 3a - 4b + 13 = 0.
\end{aligned}$$

(d) Soit $G = (u, v, w)$ un point de l'espace. On note $A := (5, 7, 1)$ et $Z := (-3, 1, 2)$ les points de l'énoncé. On a alors les équivalences

$$\begin{aligned}
G \in (AZ) &\iff \overrightarrow{ZG} \parallel \overrightarrow{ZA} \\
&\iff \overrightarrow{ZG} \times \overrightarrow{ZA} = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} u+3 \\ v-1 \\ w-2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} -v - 6w + 13 \\ u + 8w - 13 \\ 6u - 8v + 26 \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \begin{cases} -v - 6w + 13 = 0 \\ u + 8w - 13 = 0 \\ 6u - 8v + 26 = 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

En remarquant que la troisième égalité découle des deux premières (additionner 6 fois la deuxième plus 8 fois la première), on voit que le système ci-dessus équivaut à

$$\begin{cases} -v - 6w + 13 = 0 \\ u + 8w - 13 = 0 \end{cases},$$

d'où deux équations de plans dont la droite considérée est l'intersection.

(e) Soit $K = (f, g)$ un point du plan. On appelle $\nu := (1, 2)$ et $\pi := (-7, 10)$ les vecteur et point respectivement donnés par l'énoncé. On a alors les équivalences :

$$\begin{array}{rcl} \text{K appartient à la droite passant} & & \\ \text{par π et de vecteur normal ν} & \iff & \overrightarrow{\pi K} \perp \nu \\ & \iff & \overrightarrow{\pi K} \cdot \nu = 0 \\ & \iff & \begin{pmatrix} f+7 \\ g-10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \\ & \iff & f + 2g = 13. \end{array}$$

(f) Dans l'équation du plan donnée dans l'énoncé, on lit un vecteur normal $\eta := (8, 0, -1)$, de sorte qu'il est équivalent de dire qu'une droite donnée est orthogonale au plan considéré ou que cette droite est dirigée par η.

Soit $x = (K, L, M)$ un point de l'espace. En notant $s := (-7, 10, 2)$ le point considéré dans l'énoncé, on a alors les équivalences

$$\begin{array}{rcl} \text{x appartient à la droite passant} & & \\ \text{par s et dirigée par le vecteur η} & \iff & \overrightarrow{sx} \parallel \eta \\ & \iff & \overrightarrow{sx} \times \eta = 0 \\ & \iff & \begin{pmatrix} K+7 \\ L-10 \\ M-2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\ & \iff & \begin{pmatrix} -L+10 \\ K+8M-9 \\ -8L+80 \end{pmatrix} = 0 \\ & \iff & \begin{cases} L = 10 \\ K + 8M = 9 \end{cases} \end{array}$$

(observer que la troisième égalité $-8L + 80$ équivaut à la première $-L + 10 = 0$).

(g) Soit $\theta = (\alpha, \beta, \gamma)$ un point de l'espace. On note $V := (0, 5, -2)$ et $M := (1, 1, 1)$ les vecteur et point considérés par l'énoncé. On a alors les équivalences

$$\begin{array}{rcl} \text{θ appartient au plan passant} & & \\ \text{par M et orthogonal au vecteur V} & \iff & \overrightarrow{M\theta} \perp V \\ & \iff & \overrightarrow{M\theta} \cdot V = 0 \\ & \iff & \begin{pmatrix} \alpha-1 \\ \beta-1 \\ \gamma-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \\ & \iff & 5\beta - 2\gamma = 3. \end{array}$$

(h) Soit $d = (\varphi, \chi, \psi)$ un point de l'espace. On appelle $a := (2, 0, 4)$, $U := (1, -1, 2)$ et $V := (7, 0, 0)$ les point et vecteurs considérés par l'énoncé. On a alors les équivalences

$$\begin{array}{rcl} \text{d appartient au plan passant par a} & & \\ \text{et contenant les vecteurs U et V} & \iff & \text{les vecteurs } \overrightarrow{ad}, U, V \text{ sont coplanaires} \\ & \iff & \operatorname{Det}\left(\overrightarrow{ad}, U, V\right) = 0 \\ & \iff & \begin{vmatrix} \varphi-2 & 1 & 7 \\ \chi & -1 & 0 \\ \psi & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ & \iff & 7\chi 2 - \psi\,(-1)\,7 = 0 \\ & \iff & 2\chi + \psi = 0. \end{array}$$

(i) Appelons (x, y, z) les coordonnées d'un point P de l'espace. On notera $A := (2, 0, 4)$, $B :=$

$(-1,1,1)$ et $C := (1,6,-1)$ les points considéré dans l'énoncé. On a alors les équivalences

$$\begin{array}{rcl} \begin{array}{r} P \text{ appartient au plan défini} \\ \text{par les trois points } A,B,C \end{array} & \Longleftrightarrow & \text{les vecteurs } \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ sont coplanaires} \\ & \Longleftrightarrow & \operatorname{Det}\left(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \begin{vmatrix} x-2 & -3 & -1 \\ y & 1 & 6 \\ z-4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 0 \\ & \Longleftrightarrow & 13x - 12y - 17z + 42 = 0 \end{array}$$

4. (a) Abrégeons $t := \tan\frac{\theta}{2}$. On a alors (utiliser les formules de duplication ainsi que la relation $1+\tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$)

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \sin\left(2\frac{\theta}{2}\right) = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}} = \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos\theta &= \cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \tan\theta &= \tan\left(2\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2t}{1-t^2}. \end{aligned}$$

(b) Abrégeons $c := \cos^2\delta$. On utilise successivement

$$\begin{aligned} \cos(2\delta) &= 2\cos^2\delta - 1 = 2c - 1, \\ \cos(4\delta) &= 2\cos^2(2\delta) - 1 = 2(2c-1)^2 - 1 = 8c^2 - 8c + 1, \\ \cos(8\delta) &= 2\cos^2(4\delta) - 1 = 2\left(8c^2 - 8c + 1\right)^2 - 1 \\ &= 2\left(64c^4 - 84c^2 + 1 - 128c^3 - 16c - 16c^2\right) - 1 \\ &= 128c^4 - 256c^3 + 160c^2 - 32c + 1. \end{aligned}$$

Pour le sextuple, on commence par évaluer le triple

$$\begin{aligned} \cos 3\delta &= \cos(2\delta + \delta) = \cos(2\delta)\cos\delta - \sin(2\delta)\sin\delta \\ &= \left(2\cos^2\delta - 1\right)\cos\delta - 2\underbrace{\sin\delta\cos\delta\sin\delta}_{=\cos\delta(1-\cos^2\delta)} \\ &= (4c-3)\cos\delta \text{ puis on double ce triple :} \\ \cos 6\delta &= \cos(2(3\delta)) = 2\cos^2(3\delta) - 1 \\ &= 2(4c-3)^2 c - 1 \\ &= 32c^3 - 48c^2 + 18c - 1. \end{aligned}$$

On pourrait présenter les résultats trouvés sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \cos(2\cdot) &= 2\cos^2 - 1, \\ \cos(4\cdot) &= 8\cos^4 - 8\cos^2 + 1, \\ \cos(6\cdot) &= 32\cos^6 - 48\cos^4 + 18\cos^2 - 1, \\ \cos(8\cdot) &= 128\cos^8 - 256\cos^6 + 160\cos^4 - 32\cos^2 + 1. \end{aligned}$$

(c) Notons $q(t) := \sin^6 t + \cos^6 t + 3\left(\sin^2 t\right)\cos^2 t$ pour tout réel t. Calculons comme demandé :

$$\begin{aligned} q(0) &= 0^6 + 1^6 + 3 \cdot 0^2 \cdot 1^2 = 1, \\ q\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{2^6} + \frac{\sqrt{3}^6}{2^6} + 3\frac{1}{2^2}\frac{\sqrt{3}^2}{2^2} \\ &= \frac{1+27}{64} + \frac{9}{16} = \frac{7}{16} + \frac{9}{16} = 1, \\ q\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}^6} + \frac{1}{\sqrt{2}^6} + 3\frac{1}{\sqrt{2}^2}\frac{1}{\sqrt{2}^2} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + 3\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1, \\ q\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\sqrt{3}^6}{2^6} + \frac{1}{2^6} + 3\frac{\sqrt{3}^2}{2^2}\frac{1}{2^2} \\ &= \frac{27+1}{64} + \frac{9}{16} = \frac{7}{16} + \frac{9}{16} = 1, \\ q\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1^6 + 0^6 + 3 \cdot 1^2 \cdot 0^2 = 1. \end{aligned}$$

Il apparaît que $q(t)$ vaut toujours 1 pour les valeurs de t choisies ci-dessus. Montrons que cela est vrai quelle que soit le réel t choisi. Fixons-en un et abrégeons $c := \cos^2 t$. On a alors

$$\begin{aligned} \sin^6 t + \cos^6 t + 3\left(\sin^2 t\right)\cos^2 t &= (1-c)^3 + c^3 + 3(1-c)c \\ &= \left(1 - 3c + 3c^2 - c^3\right) + c^3 + 3c - 3c^2 \\ &= 1, \text{ c. q. f. d..} \end{aligned}$$

(d) Notons $\tau := \tan\frac{\pi}{8}$. On a $1 = \tan\frac{\pi}{4} = \tan\left(2\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2\tau}{1-\tau^2}$, d'où $1 = \tau^2 + 2\tau = (\tau+1)^2 - 1$ et $\tau = -1 \pm \sqrt{2}$; la valeur négative étant à rejeter, on trouve

$$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1.$$

On en déduit $\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1+\tan^2\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{1+3-2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, d'où (la valeur négative est toujours à rejeter)

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

et $\sin^2\frac{\pi}{8} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ d'où

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Il en résulte

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8 = \left(2\cos\frac{\pi}{8} + 2i\sin\frac{\pi}{8}\right)^8 = \left(2e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^8 = 2^8 e^{i\pi} = -256.$$

(e) Soit x réel. On a les équivalences

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \sin 5x \iff \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) \iff \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} - 5x \mod 2\pi \\ \text{ou} \\ 3x = -\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) \mod 2\pi \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 8x = \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \\ \text{ou} \\ 2x = \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{16} \ \left[\frac{\pi}{4}\right] \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{4} \ [\pi] \end{cases}. \end{aligned}$$

(f) Soit s un réel. Pour simplifier la somme $\left(1+\sqrt{2}\right)\cos s + \sin s$, on introduisant le complexe $1 + \sqrt{2} + i$. Son module vaut

$$\left|1 + \sqrt{2} + i\right| = \sqrt{\left(1 + 2\sqrt{2} + 2\right) + 1} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

et il sera utile de remarquer (d'après la question (d)) qu'il s'agit de l'inverse de $\sin\frac{\pi}{8}$:

$$\frac{1}{\left|1+\sqrt{2}+i\right|} = \sqrt{\frac{1}{4+2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{2}}{4^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = \sin\frac{\pi}{8}.$$

Par ailleurs, l'argument de ce complexe est dans le premier quadrant et a pour tangente $\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \sqrt{2}-1 = \tan\frac{\pi}{8}$, donc vaut $\frac{\pi}{8}$. On peut par conséquent simplifier

$$\left(1+\sqrt{2}\right)\cos s + \sin s = \frac{\cos\left(s-\frac{\pi}{8}\right)}{\sin\frac{\pi}{8}}.$$

On en déduit les équivalences

$$\begin{aligned}\left(1+\sqrt{2}\right)\cos s+\sin s &= 1 \iff \cos\left(s-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\frac{\pi}{8} \iff \cos\left(s-\frac{\pi}{8}\right)=\cos\frac{3\pi}{8}\\ &\iff \left\{\text{ou}\begin{array}{l} s-\frac{\pi}{8}=\frac{3\pi}{8}\ [2\pi]\\ s-\frac{\pi}{8}=-\frac{3\pi}{8}\ [2\pi]\end{array}\right. \iff \left\{\text{ou}\begin{array}{l} s=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\\ s=-\frac{\pi}{4}\ [2\pi]\end{array}\right. .\end{aligned}$$

(g) Soit q un réel. On factorise

$$\begin{aligned}\cos q+2\cos 2q+\cos 3q &= (\cos q+\cos 2q)+(\cos 2q+\cos 3q)\\ &= 2\cos\frac{q}{2}\cos\frac{3q}{2}+2\cos\frac{q}{2}\cos\frac{5q}{2}\\ &= 2\cos\frac{q}{2}\left(\cos\frac{3q}{2}+\cos\frac{5q}{2}\right)\\ &= 2\cos\frac{q}{2}\left(2\cos\frac{q}{2}\cos 2q\right).\end{aligned}$$

On en déduit les équivalences

$$\begin{aligned}\cos q+2\cos 2q+\cos 3q &= 0 \iff \left(\cos^2\frac{q}{2}\right)\cos 2q=0 \iff \left\{\text{ou}\begin{array}{l}\cos\frac{q}{2}=0\\ \cos 2q=0\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\text{ou}\begin{array}{l}\frac{q}{2}=\pm\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\\ 2q=\pm\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\end{array}\right. \iff \left\{\text{ou}\begin{array}{l}q=\pm\pi\ [2\pi]\\ q=\pm\frac{\pi}{4}\ [\pi]\end{array}\right.\\ &\iff q\in\left(\mathbf{Z}\frac{\pi}{4}\right)\backslash\mathbf{Z}\pi\ .\end{aligned}$$

(h) Il suffit d'invoquer la formule $\tan\arg=\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}$ valide lorsque $\mathrm{Re}>0$. On en déduit que la somme cherchée vaut

$$\begin{aligned}\arg(1+2i)+\arg(1+5i)+\arg(1+8i) &= \arg((1+2i)(1+5i)(1+8i)) \mod 2\pi\\ &= \arg(1-40-16-10+i(8+5+2-80)) \mod 2\pi\\ &= \arg(-65-65i) \mod 2\pi\\ &= -\frac{3\pi}{4} \mod 2\pi.\end{aligned}$$

Or la somme cherchée appartient à $\left[-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ et est positive : elle égale donc l'unique réel de $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ valant $-\frac{3\pi}{4} \mod 2\pi$, à savoir $\frac{5\pi}{4}$.

(i) Soit $a+ib$ un racine carrée de $119+120i$. On a donc $119+120i=(a+ib)^2=a^2-b^2+2iab$, d'où le système $\left\{\begin{array}{l}a^2+\left(-b^2\right)=119\\ -a^2b^2=-3600\end{array}\right.$, ce qui montre que a^2 et $-b^2$ sont racines du trinôme $X^2-119X-3600$. Le discriminant de ce dernier vaut $119^2+4\cdot 3600=28\,561$. Vu l'indication, on trouve rapidement que ce discriminant est le carré de 169. Il en résulte que a^2 et $-b^2$ valent $\frac{119+169}{2}=12^2$ et $\frac{119-169}{2}=-5^2$, le signe permettant de trancher $a=12\varepsilon$ et $b=5\varepsilon$ pour un certain signe ε (se souvenir que le produit $ab=60$ est positif).

Les racines quatrième de $119+120i$ seront donc les racines carrées de $12+5i$ multipliées par une racine de ε (à savoir ±1 ou $\pm i$). Notons $c+di$ une telle racine carrée. Les réels c^2 et $-d^2$ sont racines du trinôme

$$X^2-12X-\frac{25}{4}=(X-6)^2-36-\frac{25}{4}=(X-6)^2-\left(\frac{13}{2}\right)^2=\left(X-\frac{25}{2}\right)\left(X+\frac{1}{2}\right),$$

d'où l'on tire $c=\frac{5}{\sqrt{2}}$ et $d=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Finalement, les racines quatrièmes de $119+120i$ sont $\omega\left(\frac{5+i}{\sqrt{2}}\right)$ pour ω parcourant les racines quatrième de l'unité $(1,i,-1,-i)$).

5. Nous admettrons que tout polygone peut se construire par agglutination de triangles : on va par conséquent montrer la formule sur des figures élémentaires puis qu'elle passe bien à l'"agglutination".

Considérons un grand polygone d'aire A ayant B points sur le bord et I points à l'intérieur. On le coupe en deux selon un segment (dont on note s le nombre de mailles autre que ses extrémités) joignant deux de ses sommets. On obtient deux polygones dont on notera a et α les aires, b et β les nombres de points-bord et i et ι les nombres de points intérieurs. On a des relations $\left\{\begin{array}{c} A = a + \alpha \\ I = i + \iota + s \\ B = b + \beta - 2(s+1) \end{array}\right.$, d'où

$$I + \frac{B}{2} - 1 = \left(i + \frac{b}{2} - 1\right) + \left(\iota + \frac{\beta}{2} - 1\right).$$

Ainsi, la formule souhaitée sera vérifiée pour l'un des trois polygones dès qu'elle le sera pour deux d'entre eux.

Pour un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes et ont pour longueurs l et L, on a $\left\{\begin{array}{c} i = (l-1)(L-1) \\ b = 2L + 2l \end{array}\right.$, de sorte que la quantité

$$i + \frac{b}{2} - 1 = (lL - L - l + 1) + (L + l) + 1 = lL \text{ vaut bien son aire.}$$

Pour un triangle rectangle dont les deux côtés adjacents à l'angle droits sont parallèles aux axes, on le complète en un rectangle en le symétrisant par rapport au centre de son hypoténuse : avec les notations de l'agglutination, on aura alors $(a, b, i) = (\alpha, \beta, \iota)$, d'où les relations $\left\{\begin{array}{c} I + \frac{B}{2} - 1 = 2\left(i + \frac{b}{2} - 1\right) \\ A = 2a \end{array}\right.$, ce qui montre la formule pour le triangle considéré (puisqu'on l'a établie pour les rectangles).

Pour un triangle quelconque, on le circonscrit par un rectangle de côtés parallèles aux axes, lequel se décompose d'une part en le triangle considéré d'autre part en plusieurs triangles rectangles pour lesquels on a établi la formule. La remarque d'agglutination permet alors de conclure à la formule pour le triangle quelconque, *a fortiori* à toute figure obtenue par agglutination de triangles.