Devoir surveillé 1

La calculatrice est interdite.

Définitions. *Donner les définitions des objets ou actions suivants D'APRÈS LE COURS*[1] *:*

1. une flèche ;
2. e^{it} où t est un réel ;
3. les sinus et cosinus d'un angle aigu non orienté ;
4. les sinus et cosinus d'un angle orienté ;
5. orienter un plan ;
6. orienter l'espace ;
7. l'addition de deux vecteurs ;
8. la multiplication d'un vecteur par un scalaire ;
9. le produit scalaire de deux vecteurs ;
10. le produit vectoriel de deux vecteurs ;
11. le produit mixte et le déterminant de deux vecteurs dans le plan ;
12. le produit mixte et le déterminant de trois vecteurs dans l'espace ;
13. l'équation d'un lieu géométrique ;
14. la distance entre deux lieux géométriques.

Propriétés. *Les questions 1 à 13 suivantes n'exigent pas de démonstration.*

1. Donner les sinus, cosinus et tangentes des angles de mesures respectives 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.
2. Soit k un réel : simplifier $\sin\left(k+\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin(\pi-k)$, $\cos\left(k-\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos(k+\pi)$ et $\tan(k+\pi)$.
3. Caractériser géométriquement la nullité
   (a) d'un produit scalaire ;
   (b) d'un produit vectoriel ;
   (c) d'un produit mixte de deux vecteurs ;
   (d) d'un déterminant de trois vecteurs.
4. Donner les quatre propriétés de l'addition vectorielle (bonus : nom ?).
5. Lister les quatre propriétés de la multiplication d'un vecteur par un scalaire (bonus : nom ?).
6. Formuler les trois propriétés de la norme.
7. Énoncer les *deux* comparaisons de Buniakowski-Cauchy-Schwarz *avec* les cas d'égalité correspondants.
8. Exprimer le produit scalaire de deux vecteurs en fonctions de leurs coordonnées (on précisera les propriétés de la base utilisée).
9. Le produit scalaire est-il associatif ? commutatif ? bilinéaire ?
10. Le produit vectoriel est-il associatif ? commutatif ? bilinéaire ?
11. Le déterminant (de deux vecteurs) est-il associatif ? commutatif ? bilinéaire ?
12. Soient a, b et c trois vecteurs (deux à deux distincts). Exprimer, pour toute permutation σ de l'ensemble $\{a,b,c\}$, le produit mixte $[\sigma(a),\sigma(b),\sigma(c)]$ en fonction du déterminant $\operatorname{Det}(a,b,c)$.
13. Donner trois équations (une dans chacun des trois systèmes de coordonnées usuels) d'un cône d'axe celui des cotes dont on note φ_0 l'angle fait par tout vecteur d'origine nulle avec cet axe.

Démonstrations. *Énoncer et démontrer les théorèmes suivants :*

1. la loi des sinus ;
2. la relation d'Al-Kashi ;
3. l'équivalence $u \parallel v \iff (u=0 \text{ ou } \exists\lambda\in\mathbf{R},\ v=\lambda u)$ où u et v sont deux vecteurs donnés ;

[1] c'est-à-dire : pas d'après vos souvenirs d'avant-bac

4. les formules d'additions de sinus, cosinus et tangente ;
5. l'expression de la distance d'un point à un plan donné par une équation ;
6. l'expression des coordonnées du produit vectoriel de deux vecteurs en fonction des coordonnées de chacun d'entre eux (on précisera les propriétés de la base utilisée) ;
7. l'existence d'une perpendiculaire commune à deux droites dans l'espace ;
8. le fait que, si A et B sont des points appartenant respectivement à une droite α et à une droite β de sorte que la droite (AB) soit orthogonale à α et β, alors la distance entre les droites α et β vaut AB ;

Exercices.

1. *(démonstrations générales)*
   (a) Démontrer la propriété 8 ci-dessus.
   (b) Démontrer les formules du cours (données en TDs) exprimant les produits vectoriels de trois vecteurs.
   (c) Soient A et B deux points du plan. Déterminer le lieu des points M tels que $3AM = 2BM$.
   (d) Soient A et B deux points de l'espace. Déterminer le lieu des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 3$.
   (e) On fixe deux points A et B de l'espace. Montrer que la quantité $AM^2 + 2BM^2$ atteint sa plus petite valeur (lorsque M décrit les points de l'espace) en un unique point que l'on décrira.
2. *(calculs de mesures)*
   (a) Calculer l'aire du quadrilatère formé par les quatre points $-2 - i$, $1 + i$, $1 - 2i$ et 3.
   (b) Évaluer le sinus de l'angle fait par les vecteurs $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{6}, -1\right)$ et $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{6}, -1\right)$.
   (c) Trouver l'aire du tétraèdre délimité par les points $(0,0,1)$, $(0,1,2)$, $(-1,3,4)$ et $(-2,-5,3)$.
3. *Donner une équation :*
   (a) du lieu des points M tels que $4AM = 7BM$ où $A := (2,-1)$ et $B := (-5,3)$;
   (b) du lieu des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 3$ avec $A := (2,-1)$ et $B := (-5,3)$;
   (c) de la droite passant par les points $(5,7)$ et $(-3,1)$;
   (d) de la droite passant par les points $(5,7,1)$ et $(-3,1,2)$ et donner des équations de deux plans dont elle est l'intersection ;
   (e) de la droite de vecteur normal $(1,2)$ et passant par le point $(-7,10)$;
   (f) de la droite orthogonale au plan d'équation $8x - z = 2$ et passant par le point $(-7,10,2)$;
   (g) du plan de vecteur normal $(0,5,-2)$ et passant par le point $(1,1,1)$;
   (h) du plan contenant le point $(2,0,4)$ et dirigé par les vecteurs $(1,-1,2)$ et $(7,0,0)$;
   (i) du plan contenant les trois points $(2,0,4)$, $(-1,1,1)$ et $(1,6,-1)$.
4. *(autour des complexes)*
   (a) Soit θ un réel hors de[2] $\pi\mathbf{Z}$. Exprimer ses sinus, cosinus et tangente en fonction de $\tan\frac{\theta}{2}$.
   (b) Soit δ un réel. Exprimer $\cos 2\delta$, $\cos 4\delta$, $\cos 6\delta$ et $\cos 8\delta$ en fonction de $\cos\delta$.
   (c) Évaluer la quantité $\sin^6 t + \cos^6 t + 3\left(\sin^2 t\right)\cos^2 t$ lorsque t vaut respectivement 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$. Formuler alors une conjecture que l'on démontrera.
   (d) Calculer les tangente, cosinus et sinus de $\frac{\pi}{8}$ et en déduire $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8$.
   (e) Caractériser tous les réels dont le cosinus du triple vaut le sinus du quintuple.
   (f) Déterminer les réels σ tels que $\left(1+\sqrt{2}\right)\cos\sigma + \sin\sigma = 1$.
   (g) Trouver tous les réels ζ tels que $\cos\zeta + 2\cos 2\zeta + \cos 3\zeta = 0$.
   (h) Montrer que $\tan\arg(1 + \tau i) = \tau$ pour tout réel τ. En déduire la somme de trois nombres réels chacun tombant dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et dont les tangentes sont respectivement 2, 5 et 8.
   (i) Déterminer sous forme rectangulaire les racines carrées de $119 + 120$ (on donne au besoin l'encadrement $27000 < 165^2 < 170^2 < 29000$) ainsi que ses racines quatrièmes[3].
5. *(bonus – uniquement si tout est fini)* On appelle ***maille*** tout point du plan à coordonnées entières. On considère un polygone P dont les sommets sont des mailles. On note i et b le nombre de mailles qui sont respectivement intérieures à P et sur le bord de P. Montrer que l'aire de P vaut $i + \frac{b}{2} - 1$.

[2] *i. e.* non multiple entier de π
[3] Une racine quatrième d'un complexe z est un complexe r tel que $r^4 = z$.