Devoir maison 8

(à rendre pour le lundi 10 juin 2013)

Solution proposée.

Exercice (angles d'Euler). Rappelons qu'une rotation est une isométrie, donc préserve l'orthogonalité. On pourra s'autoriser, par soucis de lisibilité, à ne pas noter toutes les parenthèses d'application.

1. Appelons π et π' les plans (vectoriels) orthogonaux respectivement à c et c'. On a alors, pour toute droite D de $\mathbf{R}^3$, les équivalences

$$\left\{\begin{array}{l} D\perp c \\ D\perp c'\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} D\subset \pi \\ D\subset \pi'\end{array}\right. \iff D\subset \pi\cap\pi'.$$

Or la dimension de l'intersection $\pi\cap\pi'$ vaut $\underbrace{\dim\pi}_{=2}+\underbrace{\dim\pi'}_{=2}-\underbrace{\dim\left(\underbrace{\pi+\pi'}_{\subset\mathbf{R}^3}\right)}_{\leq\dim(\mathbf{R}^3)=3}\geq 2+2-3=1$, ce qui montre que $\pi\cap\pi'$ contient une droite, *c. q. f. d.*.

2. Puisque a est non nul et orthogonal à b et c, appartenir au plan $\operatorname{Vect}\{c,b\}$ équivaut à être orthogonal à a. On en déduit les équivalences

$$\begin{array}{rl} & c'\in\operatorname{Vect}\{c,P(b)\} \\ \overset{\text{car } P(c)=c}{\iff} & c'\in\operatorname{Vect}\{P(c),P(b)\} \\ \underset{\text{linéaire}}{\overset{\text{car } P \text{ est}}{\iff}} & c'\in P(\operatorname{Vect}\{c,b\}) \\ \underset{\text{bijective}}{\overset{\text{car } P \text{ est}}{\iff}} & P^{-1}(c')\in\operatorname{Vect}\{c,b\} \\ \iff & P^{-1}(c')\perp a \\ \underset{\text{l'orthogonalité}}{\overset{\text{car } P \text{ préserve}}{\iff}} & c'\perp P(a)\,,\text{ ce qui est vrai puique } P(a)\in\Delta\perp c'. \end{array}$$

3. Dans le plan $\operatorname{Vect}\{c,P(b)\}$ orienté par $P(a)$, les angles orientés $(\widehat{c,c'})$ et $(\widehat{c,N}(c))$ valent tous deux θ, ce qui montre que les vecteurs c' et $N(c)$ sont colinéaires de même sens ; étant par ailleurs tous deux unitaires (car c est unitaire et N est une isométrie), ils sont donc égaux.

4. En notant p la restriction de P au plan $\operatorname{Vect}\{a,b\}$, on a les égalités

$$P(a)=p(a)\,,\qquad P(b)=p(b)\qquad\text{et}\qquad P(c)=c,$$

ce qui montre que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}P$ vaut $\begin{pmatrix}\operatorname{Mat}_{(a,b)}p & \\ & 1\end{pmatrix}$. Or p est la rotation d'angle ψ dans le plan $\operatorname{Vect}\{a,b\}$ orienté par c, d'où l'on tire $\operatorname{Mat}_{(a,b)}p=\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi\end{pmatrix}$. On a finalement $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}P=\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & \\ \sin\psi & \cos\psi & \\ & & 1\end{pmatrix}$.

De la même façon, en appelant n la restriction de N au plan $\operatorname{Vect}\{P(b),c\}$ orienté par $P(a)$, on montrerait l'égalité $\operatorname{Mat}_{P(\mathcal{B})}N=\begin{pmatrix}1 & \\ & \operatorname{Mat}_{(P(b),c)}n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.

5. Il suffit de montrer que les vecteurs $NP(a)$ et $NP(b)$ sont dans $\operatorname{Vect}\{a',b'\}$, *i. e.* qu'ils sont orthogonaux à c'. Or le vecteur c est orthogonal à a et b, donc le vecteur $NP(c)=N(c)=c'$ est orthogonal à $NP(a)$ et à $NP(b)$.

6. Les rotations d'un plan fixé étant en bijection avec $]-\pi,\pi]$ (où a bien été invoqué φ), l'énoncé demande de montrer les existence et unicité d'une rotation du plan $\operatorname{Vect}\{a',b'\}$ qui envoie la famille $(NP(a), NP(b))$ sur (a',b'). Il suffit pour cela de montrer que ces deux familles sont des bases orthonormées directes du plan $\operatorname{Vect}\{a',b'\}$.

Pour (a',b'), c'est évident en orientant le plan par c' puisque (a',b',c') est une base orthornormée directe de $\mathbf{R}^3$. Par ailleurs, l'image de la base orthornormée directe (a,b,c) par les rotations P puis N est encore une base orthornormée directe de $\mathbf{R}^3$, donc la famille $(NP(a), NP(b))$ du plan $\operatorname{Vect}\{NP(a), NP(b)\} = \operatorname{Vect}\{a',b'\}$ orienté par $NP(c) = N(c) = c'$ en est une base orthonormée directe, *c. q. f. d.*.

7. Remarquons que $RNP(c) = R(c') = c'$; on en déduit, grâce à la question précédente, l'égalité $\mathcal{B}' = RNP(\mathcal{B})$. On dispose par conséquent des égalités

$$\begin{aligned}
\operatorname{Pass}(\mathcal{B},\mathcal{B}') &= \operatorname{Pass}(\mathcal{B}, RNP(\mathcal{B})) \\
&= \operatorname{Pass}(\mathcal{B}, P(\mathcal{B})) \times \operatorname{Pass}(P(\mathcal{B}), NP(\mathcal{B})) \times \operatorname{Pass}(NP(\mathcal{B}), RNP(\mathcal{B})) \\
&= \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} P(\mathcal{B}) \times \operatorname{Mat}_{P(\mathcal{B})} NP(\mathcal{B}) \times \operatorname{Mat}_{NP(\mathcal{B})} R(NP(\mathcal{B})) \\
&= \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} P \times \operatorname{Mat}_{P(\mathcal{B})} N \times \operatorname{Mat}_{NP(\mathcal{B})} R, \text{ } c.\ q.\ f.\ d..
\end{aligned}$$

8. Restriendre la rotation R au plan $\operatorname{Vect}\{NP(a), NP(b)\}$ nous préciserait (comme à la question 4) la matrice $\operatorname{Mat}_{NP(\mathcal{B})} R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \\ & & 1 \end{pmatrix}$. Il en résulte les égalités

$$\begin{aligned}
\operatorname{Pass}(\mathcal{B},\mathcal{B}') &= \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} P \times \operatorname{Mat}_{P(\mathcal{B})} N \times \operatorname{Mat}_{NP(\mathcal{B})} R \\
&= \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & \\ \sin\psi & \cos\psi & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \\ & & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & \\ \sin\psi & \cos\psi & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\cos\varphi \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\psi\sin\varphi & -\cos\varphi\sin\psi - \cos\theta\cos\psi\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi\sin\psi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\psi\cos\varphi & -\sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix}, \text{ } c.\ q.\ f.\ d..
\end{aligned}$$

Problème.

Partie 1 (intégrales de Wallis).

1. On a les égalités

$$\begin{aligned}
W_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 t \ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 = \frac{\pi}{2} \text{ et} \\
W_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^1 t \ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin = [-\cos]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.
\end{aligned}$$

Le calcul de $W_2 = \frac{\pi}{4}$ a été vu de deux façons différentes en cours. Enfin, vu la linéarisation $\sin^3 t = \frac{3\sin - \sin(3\operatorname{Id})}{4}$, on peut calculer

$$W_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin t - \sin(3t)}{4} dt = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3t)\,dt.$$

La première intégrale vaut $W_1 = 1$ et la seconde (après reparamétrage $u := 3t$) $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin(u)\,\frac{du}{3} = \left[\frac{-\cos}{3}\right]_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{3}$, d'où l'égalité $W_3 = \frac{3}{4}1 - \frac{1}{4}\frac{1}{3} = \frac{3\cdot 3-1}{12} = \frac{2}{3}$.

2. Soit par l'absurde $a \in \mathbf{N}$ tel que $W_a = 0$. L'intégrande $\sin^a$ étant continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et y gardant un signe constant (positif), la nullité de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a$ implique celle de l'intégrande $\sin^a$, donc la nullité de $\sin^a\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, ce qui est faux.

3. Soit $k \in \mathbf{N}$. En reparamétrant $u := \frac{\pi}{2} - t$ (d'où $du = -dt$), on obtient

$$W_k = \int_{\frac{\pi}{2}-0}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}} \sin^k\left(\frac{\pi}{2} - t\right)(-dt) = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^k t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k t \, dt, \ c.\ q.\ f.\ d..$$

4. Soit $E \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Notons $\varepsilon := \frac{E}{3}$. Puisque $|\cos \varepsilon| < 1$, la suite $(\cos^n \varepsilon)$ tend vers 0, donc on peut invoquer un entier N tel que $n \geq N \Longrightarrow |\cos^n \varepsilon| \leq \varepsilon$. Pour un tel n, on a alors les comparaisons

$$0 \leq W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n = \int_0^{\varepsilon} \cos^n + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \ ;$$

puisque $|\cos^n| \leq 1$, la première intégrale est majorée par $(\varepsilon - 0)\, 1 = \varepsilon$; puisque $\cos$ décroît sur $\left[\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right]$, la seconde intégrande est majorée par $\cos^n \varepsilon \leq \varepsilon$, donc la seconde intégrale est majorée par $\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\varepsilon \leq \frac{\pi}{2}\varepsilon \leq 2\varepsilon$. On en déduit $|W_n| \leq 3\varepsilon = E$ pour n assez grand, ce qui conclut.

5. Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Multiplier la comparaison $\sin t \leq 1$ par $\sin^n t$ (qui est positif) donne $\sin^{n+1} t \leq \sin^n t$, d'où (en intégrant sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) la comparaison $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n$, *i. e.* $W_{n+1} \leq W_n$, ce qui conclut.

6. Soit $d \geq 2$ un entier. On intègre par parties : (la flèche indique le sens de dérivation)

$$\downarrow \begin{array}{cc} \sin^{d-1} & \sin \\ (d-1)\cos \times \sin^{d-2} & -\cos \end{array} \uparrow .$$

On obtient les égalités

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^d &= \left[\sin^{d-1} \times (-\cos)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (d-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{d-2} \times \cos^2 \\
&= 0 + (d-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{d-2} \times \left(1 - \sin^2\right), \text{ ce qui équivaut à} \\
W_d &= (d-1)\left(W_{d-2} - W_d\right), \text{ ou encore à } W_d = \frac{d-1}{d} W_{d-2}, \ c.\ q.\ f.\ d..
\end{aligned}$$

7. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. La décroissance de (W_k) permet d'affirmer les comparaisons $W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$ et la question 6 l'équivalence $W_{n+1} \sim W_{n-1}$ (le quotient $\frac{W_{n+1}}{W_{n-1}} = \frac{n}{n+1}$ tend vers 1). En divisant ces comparaisons par W_{n+1} (qui est strictement positif d'après la question 2), on obtient l'encadrement

$$\underbrace{1}_{\longrightarrow 1} \leq \frac{W_n}{W_{n+1}} \leq \underbrace{\frac{W_{n-1}}{W_{n+1}}}_{\longrightarrow 1}, \text{ d'où (d'après les gendarmes) la tendance } \frac{W_n}{W_{n+1}} \longrightarrow 1, \ c.\ q.\ f.\ d..$$

8. Pour tout entier a, on note $P(a)$ l'énoncé $\left\{ \begin{array}{l} W_{2a} = \frac{(2a)!}{a!^2\ 4^a}\frac{\pi}{2} \\ W_{2a+1} = \frac{a!^2\ 4^a}{(2a+1)!} \end{array} \right.$.

Les égalités $\frac{(2\cdot 0)!}{0!^2\ 4^0}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = W_0$ et $\frac{0!^2\ 4^0}{(2\cdot 0+1)!} = 1 = W_1$ montrent l'énoncé $P(0)$.

Soit $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $P(k-1)$. La question 6 permet d'écrire

$$\begin{aligned}
I_{2k} &= \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \frac{2k-1}{2k}\frac{(2k-2)!}{(k-1)!^2\ 4^{k-1}}\frac{\pi}{2} = \frac{2k \cdot (2k-1) \cdot (2k-2)!}{(2k)^2\ (k-1)!^2\ 4^{k-1}}\frac{\pi}{2} = \frac{(2k)!}{k!^2\ 4^k} \text{ et} \\
I_{2k+1} &= \frac{(2k+1)-1}{2k+1} I_{2k-1} = \frac{2k}{2k+1}\frac{(k-1)!^2\ 4^{k-1}}{(2k-1)!} = \frac{(2k)^2 \cdot (k-1)!^2 \cdot 4^{k-1}}{(2k+1) \cdot 2k \cdot (2k-1)!} = \frac{k!^2\ 4^k}{(2k+1)!},
\end{aligned}$$

d'où $P(k)$, ce qui conclut par récurrence.

9. Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons n pair, mettons $n = 2a$ pour un certain entier $a \geq 0$. On a alors

$$W_n W_{n+1} = W_{2a} W_{2a+1} = \frac{(2a)!}{a!^2\ 4^a}\frac{\pi}{2}\frac{a!^2\ 4^a}{(2a+1)!} = \frac{\pi}{2(2a+1)} = \frac{\pi}{2n+2}.$$

Supposons cette fois n impair, mettons $n = 2a-1$ pour un certain entier $a \geq 1$. On a alors

$$W_n W_{n+1} = W_{2a-1} W_{2a} = \frac{(a-1)!^2\ 4^{a-1}}{(2a-1)!}\frac{(2a)!}{a!^2\ 4^a}\frac{\pi}{2} = \frac{2a}{a^2 4}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4a} = \frac{\pi}{2n+2}.$$

Dans les deux cas, on obtient $W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2n+2} \sim \frac{\pi}{2n}$, *c. q. f. d.*.

10. Les questions 7 et 9 permettent d'affirmer $W_n^2 = W_n W_n \sim W_n W_{n+1} \sim \frac{\pi}{2n}$. Puisque la fonction $\sqrt{\mathrm{Id}}$ tend vers 1 en 1, l'équivalence $\sim$ passe à la racine carrée, ce qui permet d'affirmer

$$W_n = |W_n| = \sqrt{W_n^2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}},\ c.\ q.\ f.\ d..$$

Partie 2 (équivalent de Stirling).

1. (On renvoie au cours de calcul.) Notons (S_n) la suite de l'énoncé. Vu la positivité de $S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n^2}$ pour tout entier $n > 0$, la suite (S_n) croît (strictement). On peut par ailleurs pour tout $n \in \mathbf{N}$ majorer

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} = 1 + \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p}\frac{1}{p} \leq 1 + \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p}\frac{1}{p-1} = 1 + \sum_{p=2}^{n} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq 2,$$

ce qui montre que la suite (S_n) est majorée. Puisqu'elle croît, elle doit converger.

2. Supposons $t_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Soit $M > 0$ tel que $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ |t_k| \leq \frac{M}{k^2}$. Vu les majorations (pour tout entier $n \in \mathbf{N}$)

$$\sum_{p=1}^{n} |t_p| \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{M}{p^2} = M \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} \leq M \lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2},$$

on peut affirmer que la suite croissante $\left(\sum_{p=1}^{n} |t_p|\right)$ est majorée, donc converge. Le rappel en début de sujet permet alors de conclure.

3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a les égalités

$$\frac{q_n}{q_{n+1}} = \frac{n!\ e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \frac{(n+1)^{(n+1)+\frac{1}{2}}}{(n+1)!\ e^{n+1}} = \frac{1}{n^{n+\frac{1}{2}}} \frac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{(n+1)\ e} = \frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{e\ n^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

4. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a les égalités

$$\begin{aligned}
\ell_n &= \ln \frac{q_{n+1}}{q_n} = \ln \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}} = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= 1 - 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ c.\ q.\ f.\ d..
\end{aligned}$$

5. Si un tel C fait sens, alors on devra avoir $C \sim \frac{n!\ e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$, ce qui montre que C devra être la limite de la suite $\left(\frac{n!\ e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right)$, d'où son unicité.

Les questions 4 et 2 permettent d'affirmer la convergence de la suite $\left(\sum_{p=1}^{n} \ell_p\right) = \left(\sum_{p=1}^{n} (\ln q_{p+1} - \ln q_p)\right) = (\ln q_{n+1} - \ln q_1)$, ce qui revient à la convergence de la suite $(\ln q_n)$. Notons $L := \lim \ln q_n$. La suite (q_n) converge alors vers $e^L =: C$ (par continuité de exp), ce qui s'écrit (puisque $C > 0$ est non nul) $\frac{n!\ e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \sim C$, ou encore $n! \sim C n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$, $c.\ q.\ f.\ d.$.

6. Les questions 8 et 10 de la première partie ainsi que la question précédente permettent d'affirmer les équivalences

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\pi}{2\,(2n)}} &\sim W_{2n} = \frac{(2n)!}{n!^2\ 4^n}\frac{\pi}{2} \sim \frac{C\,(2n)^{2n+\frac{1}{2}}\ e^{-2n}}{\left(C n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\right)^2\ 4^n}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{C\ 2^{2n}\ n^{2n}\ \sqrt{2n}\ e^{-2n}}{C^2\ n^{2n+1}\ e^{-2n}\ 4^n}\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2n}}{C\ n}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{C\sqrt{2n}},
\end{aligned}$$

ce qui se réécrit $C \sim \dfrac{\frac{\pi}{\sqrt{2n}}}{\sqrt{\frac{\pi}{2(2n)}}} = \sqrt{2\pi}$, d'où l'égalité cherchée.