Devoir maison 8

(à rendre pour le lundi 10 juin 2013)

Exercice (angles d'Euler). Le but de cet exercice est d'exprimer la matrice de passage d'une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^3$ vers une autre à l'aide seulement de trois angles attribués à Leonhard EULER.

Soient $\mathcal{B} =: (a, b, c)$ et $\mathcal{B}' =: (a', b', c')$ deux bases orthonormées directes de $\mathbf{R}^3$. Soit Δ une droite orthogonale à c et à c'. On appelle ψ la mesure dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de l'angle $\widehat{(a, \Delta)}$ et θ la mesure dans $[0, \pi]$ de l'angle $\widehat{(c, c')}$. Soit $\varphi \in]-\pi, \pi]$. On note P, N et R les rotations d'axes orientés dirigés respectivement par c, $P(a)$ et c' et d'angles respectifs ψ, θ et φ.

1. *Pourquoi peut-on invoquer une telle droite* Δ *?*
2. *Montrer l'appartenance* $c' \in \operatorname{Vect}\{c, P(b)\}$. (plus difficile)
3. *En déduire l'égalité* $N(c) = c'$.
4. *Expliciter les matrices* $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} P$ *et* $\operatorname{Mat}_{P(\mathcal{B})} N$.
5. *Montrer que les vecteurs* a', b', $N(P(a))$ *et* $N(P(b))$ *sont coplanaires.*
6. *Montrer que l'équation* $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(N(P(a))) \\ R(N(P(b))) \end{pmatrix}$ *d'inconnue* φ *admet une unique solution.*

   Désormais, on désinvoque φ et on le définit comme l'unique solution à l'équation ci-dessus.
7. *Montrer l'égalité* $\operatorname{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} P \times \operatorname{Mat}_{P(\mathcal{B})} N \times \operatorname{Mat}_{N(P(\mathcal{B}))} R$.
8. *En déduire l'égalité* $\operatorname{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\psi\sin\varphi & -\cos\varphi\sin\psi - \cos\theta\cos\psi\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi\sin\psi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\psi\cos\varphi & -\sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\psi & \sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Problème. Le but du problème est de montrer l'équivalent suivant, attribué à John STIRLING et apparaissant dans son ouvrage *Methodus Differentialis* publié en 1730 :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

On admettra que, pour toute suite $(\lambda_n) \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, la suite $\left(\sum_{p=0}^n \lambda_p\right)$ converge si la suite $\left(\sum_{p=0}^n |\lambda_p|\right)$ converge.

Partie 1 (intégrales de Wallis). Pour tout entier q, on pose $W_q := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^q t \, dt$.

1. *Calculer* W_0, W_1, W_2 *et* W_3.
2. *Montrer* $\forall a \in N,\ W_a > 0$.
3. *Montrer* $\forall k \in \mathbf{N},\ W_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k$.
4. *Montrer que* $W_n \longrightarrow 0$. (plus difficile)
5. *Montrer que* (W_n) *décroît.*
6. *Montrer* $\forall d \in \{2, 3, 4, ...\},\ W_d = \frac{d-1}{d} W_{d-2}$.
7. *Montrer l'équivalence* $W_n \sim W_{n+1}$.
8. *Montrer* $\forall a \in \mathbf{N},\ \begin{cases} W_{2a} = \frac{(2a)!}{a!^2 4^a}\frac{\pi}{2} \\ W_{2a+1} = \frac{a!^2 4^a}{(2a+1)!} \end{cases}$.
9. *En déduire l'équivalence* $W_n W_{n+1} \sim \frac{\pi}{2n}$.
10. *Conclure à l'équivalence* $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Partie 2 (équivalent de Stirling). Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $q_n := \frac{n!\ e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ et $\ell_n := \ln \frac{q_{n+1}}{q_n}$.

1. *Montrer que la suite* $\left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2}\right)$ *converge.*

2. *Soit* $(t_n) \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. *Montrer que, si* $t_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, *alors la suite* $\left(\sum_{p=1}^{n} t_p\right)$ *converge.*
3. *Montrer* $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \frac{q_n}{q_{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$.
4. *Montrer* $\ell_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
5. *En déduire l'existence et l'unicité d'un réel strictement positif, noté* C, *tel que* $n! \sim C n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$.
6. *Conclure* $C = \sqrt{2\pi}$.

Indications.

Exercice.

1. non-vacuité de l'ensemble de ces Δ
2. $x \in \operatorname{Vect}\{c, b\} \iff x \perp ?$; P préserve $\perp$; $c' \in \operatorname{Vect}\{P(c), P(b)\} \overset{?}{\iff} c' \perp P(a)$
3. deux vecteurs sont égaux ssi...
4. restreindre les rotations à des plans
5. $N \circ P$ préserve $\perp$
6. les rotations de $\mathbf{R}^3$ préservent les bases orthonormées directes de $\mathbf{R}^3$
7. passer de $\mathcal{B}$ à $P(\mathcal{B})$ à $NP(\mathcal{B})$ à $RNP(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$
8. préciser $\operatorname{Mat}_{NP(\mathcal{B})} R$; huile de coude

Problème.

Partie 1.

1. linéariser
2. raisonner par l'absurde
3. reparamétrer
4. découper $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en deux segments, l'un de longueur arbitrairement petite, l'autre où l'intégrande est arbitairement petite
5. croissance de $\int_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}$
6. intégration par parties
7. utiliser les questions 5 et 6
8. récurrence
9. distinguer n pair ou impair
10. $W_n \overset{?}{\sim} W_{n+2}$

Partie 2.

1. croissance & télescopage
2. rappel & question 1
3. huile de coude
4. DL
5. convergence de (q_n)
6. équivalent de W_{2n}