Devoir maison 7

(à rendre pour le lundi 15 avril 2013)

Solution proposée.

Exercice 1.

1. Une corde horizontale de longueur L reliant deux points du graphe de f est déterminée par deux points de la forme $\binom{a}{f(a)}$ et $\binom{a+L}{f(a+L)}$ avec $f(a+L) = f(a)$. On demande donc de montrer l'existence d'un réel a tel que $f\left(a+\frac{1}{n}\right) = f(a)$, çàd de montrer que l'équation $f\left(a+\frac{1}{n}\right) = f(a)$ d'inconnue a admet une solution.
2. Observer que δ est définie sur $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$: la somme demandée fait donc sens. On a les égalités

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \delta\left(\frac{i}{n}\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left(f\left(\frac{i}{n}-\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{i}{n}\right)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(f\left(\frac{i-1}{n}\right)-f\left(\frac{i}{n}\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)-\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{j}{n}\right)-\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \overset{\text{télescopage}}{=} f\left(\frac{0}{n}\right)-f\left(\frac{n}{n}\right) = f(0)-f(1) = 0.\end{aligned}$$

3. Supposons que δ garde un signe strict. Alors toute somme d'images par δ possède ce signe strict, donc ne peut s'annuler, ce qui contredit la nullité de $\sum_{i=1}^{n} \delta\left(\frac{i}{n}\right)$.
4. La fonction f étant par hypothèse continue, l'application δ est continue comme différence de composées d'application continues. Puisque δ change de signe, le théorème des valeurs intermédiaires nous donne un zéro pour δ, d'où (en ajoutant $\frac{1}{n}$) une solution à l'équation $f\left(a+\frac{1}{n}\right) = f(a)$ d'inconnue a, ce qui conclut.

Exercice 2.

1. Lorsque f est C^1, la dérivée f' est continue, donc (d'après le théorème des valeurs intermédiaires) l'image par f' de tout intervalle est un intervalle, en particulier $f'(I)$.
2. L'application δ est dérivable et on a $\delta' = f' - m$. Puisque $(a, b) \in f'(I)$, on peut invoquer deux réels i et j dans I tel que $a = f'(i)$ et $b = f'(j)$. On a alors

$$\delta(i)\,\delta(j) = \left(f'(i)-m\right)\left(f'(j)-m\right) = \underbrace{(a-m)}_{<0}\underbrace{(b-m)}_{>0} < 0,$$

ce qui montre que δ ne garde pas le même signe sur I.

3. L'application δ étant dérivable, elle est monotone ssi δ' garde un signe constant, ce qui n'est pas d'après la question précédente.
4. On sait que δ est continue (car dérivable) : si δ était de plus injective, elle serait alors (d'après l'admis de l'énoncé) strictement monotone, ce qui n'est pas d'après la question précédente.
5. Puisque δ n'est pas injective, on peut invoquer deux réels $a \neq b$ dans I tels que $\delta(a) = \delta(b)$. Or δ est dérivable sur $[a, b]$, donc le théorème de Rolle s'applique : $\exists i \in \left]a, b\right[,\ \delta'(i) = 0$. Soit un tel i : on a alors $0 = \delta'(i) = [f' - m](i) = f'(i) - m$, d'où $m = f'(i) \in f'(I)$, *c. q. f. d.*.

Exercice 3. On observera tout d'abord que la fonction f est C^∞ sur $\left]-1, 1\right[$ comme composée d'applications C^∞, ce qui donne sens à la question 1.

1. Comme suggéré, on raisonne par récurrence. Pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, on note E_k l'énoncé

$$\exists P \in \mathbf{R}[X], \ \forall t \in]-1,1[, \ f^{(k)}(t) = \frac{P(t)\, f(t)}{\left(1-t^2\right)^{2k}}.$$

Puisque $\frac{1(t)\ \ f(t)}{(1-t^2)^{2\cdot 0}} = f(t) = f^{(0)}(t)$ pour tout $t \in]-1,1[$, on a E_0 en posant $P := 1$.
On aura besoin dans les calculs à venir de la dérivée de f. Soit $t \in]-1,1[$. On a

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt} \exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right) \\ &= \exp'\left(\frac{1}{t^2-1}\right) \times \frac{d}{dt}\frac{1}{t^2-1} \\ &= \exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right) \times \frac{2t}{\left(t^2-1\right)^2} \\ &= \frac{2t\ f(t)}{\left(1-t^2\right)^2} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{d'où au passage } E_1 \\ \text{en posant } P := 2X.\end{array}\right) \end{aligned}$$

Soit $p \in \mathbf{N}$ un entier tel que E_p. Soit $A \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\forall x \in]-1,1[, \ f^{(p)}(x) = \frac{A(x) f(x)}{(1-x^2)^{2p}}$. Soit $t \in]-1,1[$. On a alors

$$\begin{aligned} f^{(p+1)}(t)) &= \frac{d}{dt}\left(f^{(p)}(t)\right) \\ &= \frac{d}{dt}\frac{A(t)\, f(t)}{\left(1-t^2\right)^{2p}} \\ &= \frac{\left(\frac{d}{dt}\left(A(t)\, f(t)\right)\right)\cdot\left(1-t^2\right)^{2p} - A(t)\, f(t)\cdot\frac{d}{dt}\left(1-t^2\right)^{2p}}{\left(\left(1-t^2\right)^{2p}\right)^2} \\ &= \frac{\left(A'(t)\, f(t) + A(t)\, f'(t)\right)\left(1-t^2\right)^{2p} - A(t)\, f(t)\ \ 2p\left(1-t^2\right)^{2p-1}(-2t)}{\left(1-t^2\right)^{4p}} \\ &= \frac{\left(A'(t)\, f(t) + A(t)\,\frac{2t\ f(t)}{(1-t^2)^2}\right)\left(1-t^2\right)^2 + 4pt\left(1-t^2\right)A(t)\, f(t)}{\left(1-t^2\right)^{2p+2}} \\ &= \frac{\left(\left(1-t^2\right)^2 A'(t) + 2tA(t) + 4pt\left(1-t^2\right)A(t)\right) f(t)}{\left(1-t^2\right)^{2(p+1)}} \\ &= \frac{P(t)\, f(t)}{\left(1-t^2\right)^{2(p+1)}} \text{ avec } P := \left(1-X^2\right)^2 A' + 2XA + 4pX\left(1-X^2\right)A, \end{aligned}$$

ce qui montre E_{p+1}.

2. Soit $k \in \mathbf{N}$. Il s'agit de montrer que $f^{(k)}$ admet une limite finie en 1 et en -1.
Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\forall x \in]-1,1[, \ f^{(k)}(x) = \frac{P(x) f(x)}{(1-x^2)^{2k}}$. Soit $t \in]-1,1[$. On a alors

$$f^{(k)}(t) = \frac{P(t)\ \exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right)}{\left(1-t^2\right)^{2k}} = P(t)\ u^{2k} e^u \quad \text{ avec } u := \frac{1}{t^2-1}.$$

Vu les tendances $\left\{\begin{array}{c} u \xrightarrow{t\to 1} -\infty \\ \square^{2k} e^k \xrightarrow{\square\to-\infty} 0 \end{array}\right.$, on a (par composition des limites) la tendance $u^{2k}e^u \xrightarrow{t\to 1} 0$; or P est borné (car continu) au voisinage de 1, d'où la tendance $P(t)\ u^{2k}e^u \xrightarrow{t\to 1} 0$. On montrerait exactement de même la tendance $f^{(k)}(t) \xrightarrow{t\to -1} 0$.

3. Il s'agit de montrer que la fonction $f^{(k)}$ est définie sur $[-1,1]$ pour tout entier k.
Soit $n \in \mathbf{N}$. La fonction f étant C^n sur $]-1,1[$, il suffit de montrer que $f^{(n)}$ est définie en ± 1. Or la question précédente et un théorème du cours (parfois appelé "de la limite de la dérivée") montrent que $f^{(n-1)}$ est dérivable en ± 1 (de dérivée nulle en ces points), ce qui conclut.