Devoir maison 7 optionnel

(sur les tapis roulants)

Solution proposée. Remarquons tout de suite que, si $n=1$, alors γ et δ sont nuls, donc toutes leurs composées également. Cela explique la condition $n \geq 2$ imposée en début de problème.

1. Vue comme l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (a,b) & \longmapsto & (b,0) \end{array} \right.$, l'application "partie imaginaire" est un "tapis roulant" vers la gauche. (De même, l'application $i\,\mathrm{Re} : (a,b) \mapsto (0,a)$ est un "tapis roulant" vers la droite.) Par ailleurs, la partie imaginaire d'un réel étant nulle, on a toujours $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Im}\, z) = 0$ pour tout complexe z, ce qui montre que le carré cherché est l'endomorphisme nul.
2. Soit $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbf{K}^n$. On a

$$\begin{array}{rcl} \gamma^n (a_1, a_2, ..., a_n) & = & \gamma^{n-1} (a_2, a_3, ..., a_n, 0) = \gamma^{n-2} (a_3, a_2, ..., a_n, 0, 0) = \cdots = (0, 0, ..., 0) \text{ et} \\ \delta^n (a_1, a_2, ..., a_n) & = & \delta^{n-1} (0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}) = \gamma^{n-2} (0, 0, a_1, a_2, ..., a_{n-2}) = \cdots = (0, 0, ..., 0) \end{array}$$

   où les deux "$\cdots$" remplacent une preuve par récurrence des énoncés

$$\forall k \in \{0, 1, ..., n\}, \left\{ \begin{array}{l} \gamma^k (a_1, a_2, ..., a_n) = (a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_n, \underbrace{0, 0, ..., 0}_{k \text{ symboles } 0}) \\ \delta^k (a_1, a_2, ..., a_n) = (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{k \text{ symboles } 0}, a_1, a_2, ..., a_{n-k},) \end{array} \right. .$$

3. Soit $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbf{K}^n$. On a

$$\begin{array}{rcl} [\delta\gamma] (a_1, a_2, ..., a_n) & = & \delta (\gamma (a_1, a_2, ..., a_n)) = \delta (a_2, a_3, ..., a_n, 0) = (0, a_2, a_3, ..., a_n) \text{ et} \\ [\gamma\delta] (a_1, a_2, ..., a_n) & = & \gamma (\delta (a_1, a_2, ..., a_n)) = \gamma (0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}) = (a_1, a_2, ..., a_{n-1}, 0), \end{array}$$

   ce qui montre que $\delta\gamma$ (resp. $\gamma\delta$) agit en annulant la première (resp. dernière) coordonnée. On en déduit que $\delta\gamma$ et $\gamma\delta$ valent chacun son carré, donc sont des projecteurs. Ils diffèrent car ils envoient $(a_1, a_2, ..., a_n)$ sur des images distinctes si $a_1 \neq 0$ ou si $a_n \neq 0$ (ce qui est permis puisque $n \geq 2$).
4. Soit $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbf{K}^n$. La question précédente permet de décrire

$$\begin{array}{rcl} [\gamma\delta\gamma] (a_1, a_2, ..., a_n) & = & \gamma (\delta\gamma (a_1, a_2, ..., a_n)) = \gamma (0, a_2, a_3, ..., a_n) = (a_2, a_3, ..., a_n, 0) = \gamma (a_1, a_2, ..., a_n) \text{ et} \\ [\delta\gamma\delta] (a_1, a_2, ..., a_n) & = & \delta (\gamma\delta (a_1, a_2, ..., a_n)) = \delta (a_1, a_2, ..., a_{n-1}, 0) = (0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}) = \delta (a_1, a_2, ..., a_n), \end{array}$$

   ce qui montre les égalités $\gamma\delta\gamma = \gamma$ et $\delta\gamma\delta = \gamma$.
5. Soit (a_p) une suite. On a

$$\begin{array}{rcl} [\Delta\Gamma] (a_1, a_2, a_3, ...) & = & \Delta (\Gamma (a_1, a_2, a_3, ...)) = \Delta (a_2, a_3, ...) = (0, a_2, a_3, ...) \text{ et} \\ [\Gamma\Delta] (a_1, a_2, a_3, ...) & = & \Gamma (\Delta (a_1, a_2, a_3, ...)) = \Gamma (0, a_1, a_2, ...) = (a_1, a_2, ...), \end{array}$$

   ce qui montrer *que* $\Gamma\Delta = \mathrm{Id} \neq \Delta\Gamma$. La composée $\Delta\Gamma$ agit (comme $\delta\gamma$) en annulant la première coordonnée, donc est un projecteur.
6. Vu que $\Gamma\Delta = \mathrm{Id}$, il vient immédiatement $\Gamma\Delta\Gamma = \Gamma$ et $\Delta\Gamma\Delta = \Delta$.
7. Soit $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbf{K}^n$. On a les équivalences

$$\begin{array}{rcl} (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathrm{Ker}\,\gamma & \Longleftrightarrow & \gamma (a_1, a_2, ..., a_n) = (0, 0, ..., 0) \\ & \Longleftrightarrow & (a_2, a_3, ..., a_n, 0) = (0, 0, ..., 0) \\ & \Longleftrightarrow & \forall i \in \{2, 3, ..., n\}, \ a_i = 0 \\ & \Longleftrightarrow & (a_1, a_2, ..., a_n) = (a_1, 0, 0, ..., 0) \\ & \Longleftrightarrow & (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbf{K} (1, 0, 0, ..., 0), \end{array}$$

ce qui montre que le noyau de γ est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $(1,0,0,...,0)$. On a de même les équivalences

$$\begin{aligned}(a_1,a_2,...,a_n)\in \operatorname{Ker}\delta &\iff (0,a_1,a_2,...,a_{n-1})=(0,0,...,0)\\ &\iff (a_1,a_2,...,a_n)=(0,0,...,0,a_n)\\ &\iff (a_1,a_2,...,a_n)\in \mathbf{K}\,(0,0,...,0,1)\,,\end{aligned}$$

ce qui montre que le noyau de δ est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $(0,0,...,0,1)$.

Soit (a_p) une suite. On a les équivalences

$$\begin{aligned}(a_p)\in \operatorname{Ker}\Gamma &\iff \Gamma\,(a_0,a_1,a_2,...)=(0,0,...)\\ &\iff (a_1,a_2,a_3,...)=(0,0,...)\\ &\iff \forall i\in \mathbf{N}^*,\ a_i=0\\ &\iff (a_p)=(a_0,0,0,...)\\ &\iff (a_p)\in \mathbf{K}\,(1,0,0,..)\,,\end{aligned}$$

ce qui montre le noyau de Γ est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $(1,0,0,..)$. On a de même les équivalences

$$\begin{aligned}(a_p)\in \operatorname{Ker}\Delta &\iff (0,a_0,a_1,a_2,...)=(0,0,...)\\ &\iff (0=0 \text{ et } \forall i\in \mathbf{N},\ a_i=0)\\ &\iff (a_p)=0,\end{aligned}$$

ce qui montre que le noyau de Δ est nul.

Ce qui précède montre que, parmi les endomorphismes γ, δ, Γ et Δ, seul Δ est injectif.

Par ailleurs, γ ne peut atteindre aucun vecteur dont la dernière coordonnée est non nulle (par exemple $(0,0,...,0,1)$), δ et Δ ne peuvent atteindre aucun vecteur dont la première coordonnée est non nulle (par exemple $(1,0,0,...,0)$ et $(1,0,0,...)$) et tout suite (a_p) est l'image par Γ de la suite (a_{p+1}), ce qui montre que, parmi les endomorphismes γ, δ, Γ et Δ, seul Γ est surjectif.

En conséquence, aucun des endomorphismes γ, δ, Γ et Δ n'est bijectif.

8.

(a) L'énoncé proposé est faux en remplaçant (F,G) par (Γ,Δ).

(b) L'énoncé proposé est faux en remplaçant F par Γ.

(c) L'énoncé proposé est faux en remplaçant F par Δ.

(d) Supposons toujours $n\geq 2$. Alors l'énoncé proposé est faux en remplaçant f par γ et g par γ^{n-1}.

Supposons à présent $n=1$. Alors $L\,(\mathbf{K}^n)=L\,(\mathbf{K})=\{\lambda\,\mathrm{Id}\ ;\ \lambda\in\mathbf{K}\}$; puisque l'on pour tous scalaires s et t l'égalité $(s\,\mathrm{Id})\,(t\,\mathrm{Id})=(st)\,\mathrm{Id}$ et l'équivalence $s\,\mathrm{Id}=0\iff s=0$, l'énoncé proposé devient $\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbf{K}^2,\ \lambda\mu=0\Longrightarrow(\lambda=0 \text{ ou } \mu=0)$, ce qui est vrai.

Remarque. Si l'on remplace, dans les question 8a, 8b et 8c, l'espace $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ par $\mathbf{K}^n$, alors les énoncés deviennent vrai. Ce sont des propriétés caractéristiques de la dimension finie.