Devoir maison optionnel 7

(à rendre pour le lundi 15 avril 2013)

(sur les tapis roulants)

Soit $n \geq 2$ un entier. Les deux "tapis roulants" de $\mathbf{K}^n$ seront notés

$$\left\{ \begin{array}{ll} \gamma : (a_1, a_2, ..., a_n) \mapsto (a_2, a_3, ..., a_n, 0) & (\boldsymbol{g}\textit{amma} \text{ comme } \boldsymbol{g}\textit{auche}) \\ \delta : (a_1, a_2, ..., a_n) \mapsto (0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}) & (\boldsymbol{d}\textit{elta} \text{ comme } \boldsymbol{d}\textit{roite}) \end{array} \right. .$$

Les deux "tapis roulants" de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ seront notés de même

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Gamma : (a_0, a_1, a_2, ...) \mapsto (a_1, a_2, a_3, ...) & (\boldsymbol{G}\textit{amma} \text{ comme } \boldsymbol{g}\textit{auche}) \\ \Delta : (a_0, a_1, a_2, ...) \mapsto (0, a_0, a_1, a_2, ...) & (\boldsymbol{D}\textit{elta} \text{ comme } \boldsymbol{d}\textit{roite}) \end{array} \right. .$$

1. *Montrer que l'application "partie imaginaire" peut être vu comme un "tapis roulant" du* **R***-espace vectoriel* **C***. Que vaut son carré pour la composition ?*
2. *Calculer les composées* γ^n *et* δ^n*.*
3. *Décrire et comparer les composées* $\gamma\delta$ *et* $\delta\gamma$*.*
4. *Calculer les composées* $\gamma\delta\gamma$ *et* $\delta\gamma\delta$*.*
5. *Décrire et comparer les composées* $\Gamma\Delta$ *et* $\Delta\Gamma$*.*
6. *Calculer les composées* $\Gamma\Delta\Gamma$ *et* $\Delta\Gamma\Delta$*.*
7. *Les applications* γ*,* δ*,* Γ *et* Δ *sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Décrire leurs noyaux.*
8. *Les énoncés suivants sont-ils vérifiés :*
   (a) $\forall (F, G) \in L\left(\mathbf{K}^{\mathbf{N}}\right)^2, \ FG = \mathrm{Id} \Longrightarrow GF = \mathrm{Id}$ *?*
   (b) $\forall F \in L\left(\mathbf{K}^{\mathbf{N}}\right), \ F \textit{ injectif } \Longrightarrow F \textit{ surjectif}$ *?*
   (c) $\forall F \in L\left(\mathbf{K}^{\mathbf{N}}\right), \ F \textit{ surjectif } \Longrightarrow F \textit{ injectif}$ *?*
   (d) $\forall (f, g) \in L\left(\mathbf{K}^n\right)^2, \ fg = 0 \Longrightarrow (f = 0 \textit{ ou } g = 0)$ *?*