Devoir maison 7

(à rendre pour le lundi 15 avril 2013)

Exercice 1. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On veut montrer que le graphe de f admet une corde horizontale de longueur $\frac{1}{n}$.

1. *Montrer que l'on veut trouver une solution à l'équation $f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right) = 0$ d'inconnue réelle x.*
   On pose $\delta : t \mapsto f\left(t - \frac{1}{n}\right) - \delta(t)$.
2. *Calculer $\sum_{i=1}^{n} \delta\left(\frac{i}{n}\right)$.*
3. *En déduire que δ ne garde pas un signe constant.*
4. *Conclure.*

Exercice 2. On admet que toute application $I \longrightarrow \mathbf{R}$ continue injective est strictement monotone.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivable. On veut montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

1. *Conclure si f est de classe C^1.*
2. *Soient $(a,b) \in f'(I)^2$ et $m \in \left]a,b\right[$. On pose $\delta := f - m\,\mathrm{Id}$.*
3. *Montrer que δ' change de signe sur I.*
4. *En déduire que δ n'est pas monotone.*
5. *En déduire que δ n'est pas injective.*
6. *Conclure.*

Exercice 3. On pose $f : \begin{cases} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right) \text{ si } |t| < 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$.

1. *Montrer que, pour entier $n \in \mathbf{N}$, il y a un polynôme P_n tel que $\forall t \in \left]-1,1\right[,\ f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t) f(t)}{(1-t^2)^{2n}}$.* (hint : raisonner par récurrence et exprimer P_{n+1} en fonction de P_n)
2. *Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, $f^{(k)}$ se prolonge par continuité en 1 et en -1.*
3. *Montrer que f est de classe C^∞ sur $[-1,1]$.*