Devoir maison 6

(à rendre pour le mercredi 20 mars 2013)

Solution proposée.

Exercice 1.

1. La suite nulle convergeant (vers 0), le vecteur nul appartient à E. Soient par ailleurs a et b deux suites convergentes et λ un scalaire : le cours nous dit que la suite $\lambda a + b$ converge (vers $\lambda \lim a + \lim b$), d'où $\lambda a + b \in E$.

2. Montrons que δ est bien définie : il s'agit de montrer que les images par δ sont des éléments de E. Soit $a \in E$: alors (a_{n+1}) converge vers $\lim a$ (c'est une sous-suite de (a_n)), donc la différence $(a_{n+1} - a_n)$ tend vers 0, ce qui montre que $\delta(a) \in E$.

   Montrons que δ est linéaire. Soient a et b dans E et λ un scalaire. On a alors pour tout entier $n \geq 0$

$$\begin{aligned} [\delta(\lambda a + b)]_n &= [\lambda a + b]_{n+1} - [\lambda a + b]_n \\ &= (\lambda a_{n+1} + b_{n+1}) - (\lambda a_n + b_n) \\ &= \lambda (a_{n+1} - a_n) + (b_{n+1} - b_n) \\ &= \lambda [\delta(a)]_n + [\delta(b)]_n \\ &= [\lambda \delta(a) + \delta(b)]_n \text{, d'où l'égalité} \\ \delta(\lambda a + b) &= \lambda \delta(a) + \delta(b). \end{aligned}$$

3. Soit $a \in E$. On a les équivalences

$$\begin{aligned} a \in \operatorname{Ker} \delta &\iff \delta(a) = 0 \\ &\iff \forall p \in \mathbf{N},\ [\delta(a)]_p = 0 \\ &\iff \forall p \in \mathbf{N},\ a_{p+1} - a_p = 0 \\ &\iff \forall p \in \mathbf{N},\ a_{p+1} = a_p \\ &\iff (a_n) \text{ est constante.} \end{aligned}$$

4. Raisonnons par double-inclusion.

   Soit $b \in \operatorname{Im} \delta$. Soit $a \in E$ tel que $b = \delta(a)$. Alors la suite $\left(\sum_{i=0}^n b_i\right) = \left(\sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i)\right) = (a_{n+1} - a_0)$ tend vers $\lim a - a_0$, donc la suite $\left(\sum_{i=0}^n b_i\right)$ converge.

   Soit $b \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ tel que la suite $\left(\sum_{i=0}^n b_i\right)$ converge. Vu ce qui précède, la suite $(a_n) := \left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i\right)$ devrait être un antécédent de b par δ ; montrons-le. Soit $n \in \mathbf{N}$: on a

$$[\delta(a)]_n = a_{n+1} - a_n = \sum_{i=0}^{n} b_i - \sum_{i=0}^{n-1} b_i = \left(b_n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i\right) - \sum_{i=0}^{n-1} b_i = b_n,\ c.\ q.\ f.\ d..$$

5. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Étant donnée une suite $a \in E$, on a les équivalences

$$\begin{aligned} a \in E_\lambda &\iff \delta(a) = \lambda a \\ &\iff \delta(a) - [\lambda \operatorname{Id}](a) = 0 \\ &\iff [\delta - \lambda \operatorname{Id}](a) = 0 \\ &\iff a \in \operatorname{Ker}(\delta - \lambda \operatorname{Id}), \end{aligned}$$

   d'où l'égalité ensembliste $E_\lambda = \operatorname{Ker}(\delta - \lambda \operatorname{Id})$. Or un noyau d'application linéaire est toujours un sous-espace vectoriel, ce qui conclut.

6. Soit λ une valeur propre de δ. Puisque E_λ n'est pas nul, on peut considérer une suite $a \in E$ non nulle telle que $\delta(a) = \lambda a$. Soit $n \in \mathbf{N}$: on a $a_{n+1} - a_n = [\delta(a)]_n = [\lambda a]_n = \lambda a_n$, d'où $a_{n+1} = (1 + \lambda) a_n$, ce qui montre que (a_k) est une suite géométrique de raison $(1 + \lambda)$. Puisque $a \in E$ et $a \neq 0$, la suite a converge et son premier terme est non nul, ce qui permet d'affirmer que sa raison ou bien vaut 1 (cas

d'une suite constante), ce qui revient à $\lambda = 0$, ou bien est dans le disque unité ouvert, ce qui revient à ce que $|1+\lambda| < 1$.

Soit réciproquement $\mu \in \{0\} \cup \{a \in \mathbf{C} \; ; \; |1+a| < 1\}$. Alors la suite $(g_n) := ((1+\mu)^n)$ converge (donc appartient à E), est non nulle (car $g_0 = 1 \neq 0$) et vérifie

$$\forall p \in \mathbf{N}, \; [\delta(g)]_p = g_{p+1} - g_p = (1+\mu)^{p+1} - (1+\mu)^p = (1+\mu)^p ((1+\mu) - 1) = \mu g_p,$$

i. e. $\delta(g) = \mu g$, ce qui montre que μ est valeur propre de δ.

Par conséquent, les valeurs propres de δ sont 0 et les scalaires du disque ouvert de centre -1 et de rayon 1.

7. Soit λ un scalaire.

Si λ n'est pas une valeur propre de δ, alors le sous-espace E_λ est (par définition d'une valeur propre de δ) nul.

Si $\lambda = 0$, le sous-espace $E_0 = \{a \in E \; ; \; \delta(a) = 0a\} = \{a \in E \; ; \; \delta(a) = 0\}$ est le noyau de δ, lequel nous savons être (*cf.* question 3) la droite des suites constantes.

Supposons enfin $\lambda \neq 0$ et $|1+\lambda| < 1$. La question précédente montre qu'un élément de E_λ est nécessairement une suite géométrique de raison $1+\lambda$. Réciproquement, si a est une suite géométrique de raison $1+\lambda$, mettons $a = a_0 g$ où $(g_n) := ((1+\lambda)^n)$, on aura

$$\begin{aligned}
\delta(a) &= \delta(a_0 g) \\
&= a_0 \delta(g) && \text{car } \delta \text{ est linéaire} \\
&= a_0 (\lambda g) && (\textit{cf. } \text{question précédente}) \\
&= \lambda (a_0 g) && (\text{associativité de la l. c. e. de } E) \\
&= \lambda a. && \text{On en déduit l'égalité } E_\lambda = \mathbf{K}\left((1+\lambda)^n\right).
\end{aligned}$$

Finalement, le sous-espace E_λ est : ou bien le sous-espace nul (si λ n'est pas valeur propre de δ), ou bien la droite des suites géométriques de raison $1+\lambda$ (si λ est une valeur propre de δ).

8. Soit $a \in E$. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
a \in \operatorname{Ker} \delta^2 &\iff \delta^2(a) = 0 \\
&\iff \delta(\delta(a)) = 0 \\
&\iff \delta(a) \in \operatorname{Ker} \delta \\
&\iff \delta(a) \text{ est constante} \qquad (\textit{cf. } \text{question 3}) \\
&\iff \exists C \in \mathbf{K}, \; \forall n \in \mathbf{N}, \; \delta(a)_n = C \\
&\iff \exists C \in \mathbf{K}, \; \forall n \in \mathbf{N}, \; a_{n+1} - a_n = C \\
&\iff \exists C \in \mathbf{K}, \; \forall n \in \mathbf{N}, \; a_{n+1} = a_n + C \\
&\iff \exists C \in \mathbf{K}, \; (a_k) \text{ est une suite arithmétique de raison } C \\
&\iff (a_k) \text{ est une suite arithmétique.}
\end{aligned}$$

Or les seules suites arithmétiques convergentes sont les suites constantes. Le noyau de δ^2 est par conséquent la droites des suites constantes.

9. Soit $a \in E$. En remarquant pour tout entier $n \geq 0$ les égalités

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = (a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_n) = [\delta(a)]_{n+1} - [\delta(a)]_n = [\delta(\delta(a))]_n = \left[\delta^2(a)\right]_n,$$

on peut affirmer que l'équation proposée se réécrit $\delta^2(a) = \left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Cette équation étant "linéaire" en a, il suffit d'en trouver *une* solution et d'en déterminer l'ensemble des solutions "homogènes".

Ce dernier est l'ensemble $\left\{u \in E \; ; \; \delta^2(u) = 0\right\} = \operatorname{Ker} \delta^2$ que l'on vient de calculer à la question précédente (c'est la droite des suites constantes).

Cherchons à présent une solution *géométrique* (comme suggéré). Soit r un scalaire non nul et λ un scalaire. On a les implications

$$\begin{aligned}
& \text{la suite } \left(\lambda r^n\right) \text{ est solution} \\
\Longleftarrow\quad & \forall n \in \mathbf{N},\ \lambda r^{n+2} - 2\lambda r^{n+1} + \lambda r^n = \frac{1}{2^n} \\
\Longleftarrow\quad & \forall n \in \mathbf{N},\ \underbrace{\lambda (r-1)^2}_{\text{constant}} = \underbrace{\left(\frac{1}{2r}\right)^n}_{\text{géométrique}} \\
\Longleftarrow\quad & \frac{1}{2r} = 1 \text{ et } \lambda (r-1)^2 = 1 \\
\Longleftarrow\quad & r = \frac{1}{2} \text{ et } \lambda = 4,
\end{aligned}$$

ce qui montre que la suite $\left(4\frac{1}{2^n}\right) = \left(\frac{1}{2^{n-2}}\right)$ est solution.

Finalement, l'ensemble des solutions est l'ensemble des suites de la forme $\left(C + \frac{1}{2^{n-2}}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ où C parcourt les scalaires.

Exercice 2.

1. Notons $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ a & \longmapsto & \frac{a+|a|}{2} \end{array} \right.$ et $P := \{a \in \mathbf{C}\ ;\ \operatorname{Re} a \geq 0\}$. L'énoncé demande de montrer l'existence et l'unicité d'une suite $(a_n) \in P^{\mathbf{N}}$ telle que $\left\{ \begin{array}{c} a_0 = a \\ \forall n \in \mathbf{N},\ a_{n+1} = f(a_n) \end{array} \right.$; puisque $a \in P$ par hypothèse, le cours nous dit qu'il suffit pour cela que f stabilise P : montrons ceci.

   Soit $a \in P$, mettons $a = re^{i\varphi}$ où $r \geq 0$ et $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On a alors

$$f(a) = \frac{|a| + a}{2} = r\left(\frac{1 + e^{i\varphi}}{2}\right) = \underbrace{r\cos\frac{\varphi}{2}}_{\geq 0 \text{ car } |\varphi| \leq \pi} e^{i\frac{\varphi}{2}},$$

   ce qui montre que $\frac{\varphi}{2}$ est un argument de a ; puisque $\left|\frac{\varphi}{2}\right| \leq \frac{\pi}{2}$, on a bien $f(a) \in P$, *c. q. f. d.*.
2. Le calcul précédent montre que $\operatorname{Arg} a_{n+1} = \frac{\operatorname{Arg} a_n}{2}$ pour tout entier $n \geq 0$: c'est dire que la suite $(\operatorname{Arg} a_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, elle converge donc vers 0.
3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Le calcul de la question 1 montre que $|a_{n+1}| = |a_n| \cos \frac{\operatorname{Arg} a_n}{2}$ et la question précédente nous donne $\operatorname{Arg} a_n = (\operatorname{Arg} a_0)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\theta}{2^n}$, d'où l'on tire $|a_{n+1}| = |a_n| \cos \frac{\theta}{2^{n+1}}$.

   Multiplier cette dernière relation par $2^{n+1} \sin \frac{\theta}{2^{n+1}}$ donne

$$2^{n+1} |a_{n+1}| \sin \frac{\theta}{2^{n+1}} = 2^n |a_n| \, 2\left(\sin \frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \cos \frac{\theta}{2^{n+1}} = 2^n |a_n| \sin \frac{\theta}{2^n},$$

   ce qui montre que la suite $\left(|a_k| \, 2^k \sin \frac{\theta}{2^k}\right)$ est constante, donc vaut constamment son premier terme $|a_0| \, 2^0 \sin \frac{\theta}{2^0} = |a| \sin \theta$, *c. q. f. d.*.
4. Si $\theta = 0$, alors $|a| = a$, d'où $f(a) = \frac{a+a}{2} = a$, ce qui montre que la suite (a_n) vaut constamment (et donc converge vers) a.

   Si $\theta \neq 0$, alors pour tout entier n on peut réécrire $|a_n| = \frac{|a| \sin\theta}{2^n \sin \frac{\theta}{2^n}} = \frac{|a| \frac{\sin\theta}{\theta}}{\frac{\sin \frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}}}$; puisque $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\theta}{2^n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \frac{\sin \square}{\square} \overset{\square\to 0}{\longrightarrow} 1 \end{array} \right.$, le dénominateur $\frac{\sin \frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}}$ tend vers 1 lorsque $n \to \infty$, d'où l'on tire $|a_n| \longrightarrow |a| \frac{\sin\theta}{\theta}$. Puisque $\operatorname{Arg} a_n \longrightarrow 0$, nous pouvons conclure :

$$a_n \longrightarrow |a| \frac{\sin\theta}{\theta} \qquad \text{(ce qui reste valable lorsque } \theta \longrightarrow 0\text{)}.$$