Devoir maison 6

(à rendre pour le mercredi 20 mars 2013)

Exercice 1. On note E l'ensemble des suites (scalaires) convergentes. On définit une fonction

$$\delta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longmapsto & E \\ (a_n) & \longmapsto & (a_{n+1} - a_n) \end{array} \right. .$$

1. *Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$.*
2. *Montrer que δ est un endomorphisme de E.*
3. *Décrire le noyau de δ.*
4. *Montrer que l'image de δ est formé des suites (u_n) telles que la suite $\left(\sum_{i=0}^{n} u_i\right)$ converge.*

   Pour tout scalaire λ, on note $E_\lambda := \{u \in E \ ; \ \delta(u) = \lambda u\}$ et on dit que λ est une ***valeur propre*** de δ si l'ensemble E_λ n'est pas réduit au sous-espace nul.

5. *Montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de E pour tout scalaire λ.*
6. *Trouver les valeurs propre de δ.*
7. *Décrire les sous-espaces E_λ pour tout scalaire λ.*
8. *Déterminer le noyau de δ^2.*
9. *Résoudre l'équation $\forall n \in \mathbf{N},\ a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = \frac{1}{2^n}$ d'inconnue $a \in E$.* (hint : on pourra chercher une solution géométrique)

Exercice 2. Soit a un complexe de partie réelle positive dont on note θ l'argument principal.

1. *Montrer qu'il existe une unique suite complexe, notée par la suite (a_k), telle que* $\left\{ \begin{array}{c} a_0 = a \\ \forall n \in \mathbf{N},\ a_{n+1} = \frac{a_n + |a_n|}{2} \\ \forall p \in \mathbf{N},\ \operatorname{Re} a_p \geq 0 \end{array} \right. .$
2. *Montrer que $(\operatorname{Arg}(a_n))$ est une suite géométrique dont on étudiera la convergence.*
3. *Pour tout entier $n \geq 0$, exprimer $|a_{n+1}|$ en fonction de $|a_n|$ et de θ. En déduire l'égalité*

$$\forall p \in \mathbf{N},\ 2^p |a_p| \sin \frac{\theta}{2^p} = |a| \sin \theta.$$

4. *Conclure quant à la convergence de la suite (a_n) et (le cas échéant) préciser sa limite.*