Devoir maison 5

(à rendre pour le lundi 11 février 2013)

Solution proposée. (la note finale s'obtient en multipliant par $\frac{5}{4}$ la somme des points sur 22)

Exercice 1 (12 pts).

(1 pt) Le point R étant sur $\mathcal{P}$ et d'abscisse d, il a pour coordonnées $\left(d, \frac{d^2}{\lambda}\right)$.

1. **(2 pts)** [dessin]
2. **(2 pts)** En dédoublant l'équation suivante $2x^2 = 2\lambda y$ de $\mathcal{P}$ au point $\left(d, \frac{d^2}{\lambda}\right)$, on obtient une équation de $\mathcal{T}$: $2dx = \lambda\left(y + \frac{d^2}{\lambda}\right)$, *i. e.* $y = \frac{d}{\lambda}(2x - d)$.
3. **(2 pts)** La tangente $\mathcal{T}$ a pour pente $\frac{d}{\lambda}$, donc la parallèle à $\mathcal{T}$ passant par $\varphi\left(0, \frac{\lambda}{4}\right)$ a pour équation $y = \frac{2d}{\lambda}x + \frac{\lambda}{4}$. Le point I ayant pour abscisse d, on obtient $y_I = \frac{2d^2}{\lambda} + \frac{\lambda}{4}$.
4. **(3 pts)** On a d'une part
$$RI^2 = (d-d)^2 + \left(\left(\frac{2d^2}{\lambda} + \frac{\lambda}{4}\right) - \frac{d^2}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{d^2}{\lambda} + \frac{\lambda}{4}\right)^2,$$
d'autre part
$$R\varphi^2 = (d-0)^2 + \left(\frac{\lambda}{4} - \frac{d^2}{\lambda}\right)^2 = d^2 + \left(\frac{d^2}{\lambda} - \frac{\lambda}{4}\right)^2.$$
Or l'identité $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$ est valable pour tous complexes a et b, en particulier pour $a := \frac{d^2}{\lambda}$ et $b := \frac{\lambda}{4}$, d'où l'égalité recherchée.
5. **(2 pts)** Le triangle $RI\varphi$ étant isocèle en R, la hauteur issue de R est la bissectrice de l'angle $\widehat{IR\varphi}$. Or cette hauteur est orthogonale à $(I\varphi)$, donc à $\mathcal{T}$, et passe par R, donc est la normale à $\mathcal{P}$ en R.

   Interprétation : un rayon lumineux venant dans la direction de l'axe de $\mathcal{P}$ se réfléchit en direction de son foyer φ.

Exercice 2. (10 pts) On abrégera $\mu := \sqrt{\lambda^2+1}$ vu l'omniprésence dans les calcul de ce radical.

1. **(1+2 pts)** Prenons pour origine O du repère le sommet de $\mathcal{P}$, laquelle sera tournée vers les ordonnées positives, avec pour unité le paramètre $2OF$. Une équation de $\mathcal{P}$ est alors $x^2 = 2y$.

   La droite Δ a pour pente λ et passe par le point $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, donc a pour équation $y = \lambda x + \frac{1}{2}$.

   On a $x_P^2 = 2y_P = 2\lambda x_P + 1$, donc x_P (et de même x_Q) est racine du trinôme $X^2 - 2\lambda X - 1 = (X-\lambda)^2 - \left(1+\lambda^2\right)$, d'où les abscisses cherchées $x_p = \lambda - \mu$ et $x_Q = \lambda + \mu$.

   On en déduit $y_P = \lambda x_P + \frac{1}{2} = \lambda^2 - \lambda\mu + \frac{1}{2}$ et de même $y_Q = \lambda^2 + \lambda\mu + \frac{1}{2}$.
2. **(3+2 pts)** La distance de P au foyer de la parabole $\mathcal{P}$ vaut la distance de P à sa directrice $\mathcal{D}$, laquelle est d'équation $y = -\frac{1}{2}$ (l'origine, qui appartient à $\mathcal{P}$, doit être équidistante de F et de $\mathcal{D}$), d'où
$$FP = d(P, \mathcal{D}) = \left|y_P + \frac{1}{2}\right| = y_P + \frac{1}{2} \overset{y_P \geq 0}{=} \lambda^2 - \lambda\mu + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \underbrace{\lambda^2+1}_{=\mu^2} - \lambda\mu = \mu(\mu - \lambda).$$
On montrerait par le même raisonnement que $FQ = y_Q + \frac{1}{2} = \mu(\mu + \lambda)$.

   Il en résulte
$$\frac{1}{FP} + \frac{1}{FQ} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{\mu-\lambda} + \frac{1}{\mu+\lambda}\right) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\mu+\lambda+\mu-\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}^2 - \lambda^2}\right) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{2\mu}{1}\right) = 2.$$
3. **(2 pts)** Une équation de la tangente en P est $x_P x = y + y_P$, donc cette tangente a pour pente x_p. On en déduit que le produit des pentes des tangentes en P et Q respectivement vaut
$$x_P x_Q = (\lambda - \mu)(\lambda + \mu) = \lambda^2 - \mu^2 = -1,$$
ce qui montre que ces tangentes sont orthogonales.