Devoir maison 4 (optionnel)

(à rendre le mercredi 9 janvier)

Solution proposée.

1. Soit a un réel. Le réel $a^a = \left\{ \begin{array}{c} e^{a \ln a} \text{ si } a > 0 \\ 1 \text{ si } a = 0 \end{array} \right.$ fait sens ssi $a \geq 0$. On observera que, lorsque a tend vers 0, $a \ln a$ tend vers 0, donc $e^{a \ln a}$ tend vers $e^0 = 1$, ce qui montre que la fonction $\mathrm{Id}^{\mathrm{Id}}$ est continue en 0.

   Pour $a > 0$, on a

$$\frac{d}{da} a^a = \frac{d}{da} e^{a \ln a} = \left(\frac{d}{da} (a \ln a) \right) e^{a \ln a} = \left(1 \ln a + a \frac{1}{a} \right) a^a = (\ln a + 1) a^a$$

   qui est du signe de $\ln a + 1 = \ln a - \ln \frac{1}{e}$, *i. e.* de $a - \frac{1}{e}$. On en déduit que $\mathrm{Id}^{\mathrm{Id}}$ décroît sur $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ de $\mathrm{Id}^{\mathrm{Id}}(0) = 1$ à $\mathrm{Id}^{\mathrm{Id}}\left(\frac{1}{e}\right) = m$ puis croît sur $\left[\frac{1}{e}, \infty\right[$ jusqu'à l'infini (en effet, pour $x > 1$, on a $x^x = e^{x \ln x} \underset{\exp \text{ croît}}{\overset{\ln x > 0}{\geq}} e^{1 \ln x} = x \overset{x \to \infty}{\longrightarrow} \infty$). La fonction $\mathrm{Id}^{\mathrm{Id}}$ admet donc un minimum en $\frac{1}{e}$ et un maximum local en 1 mais n'admet pas de maximum sur $\mathbf{R}_+$.

   Regardons à présent le taux d'accroissement en 0 : pour $a > 0$, on a

$$\frac{\mathrm{Id}^{\mathrm{Id}}(a) - \mathrm{Id}^{\mathrm{Id}}(0)}{a - 0} = \frac{e^{a \ln a} - 1}{a} = \ln a \frac{e^{\boxed{a \ln a}} - 1}{\boxed{a \ln a}} ;$$

   or $\boxed{a \ln a}$ tend vers 0 quand $a \to 0^+$ et $\frac{e^{\square} - 1}{\square} \overset{\square \to 0}{\longrightarrow} 1$, d'où $\frac{e^{\boxed{a \ln a}} - 1}{\boxed{a \ln a}} \overset{a \to 0^+}{\longrightarrow} 1$; puisque $\ln a \overset{a \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$, il en résulte que $\frac{\mathrm{Id}^{\mathrm{Id}}(a) - \mathrm{Id}^{\mathrm{Id}}(0)}{a - 0} \overset{a \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$, d'où une tangente verticale au point $(0, 1)$.

2. On a $\sigma\binom{0}{0} = 0^0 + 0^0 = 1 + 1 = 2$.

   Pour $a > 0$, on a $\sigma\binom{a}{0} = a^0 + 0^a = 1 + 0 = 1$.

   Pour $b > 0$, on a $\sigma\binom{0}{b} = 0^b + b^0 = 0 + 1 = 1$.

   La fonction σ prend donc exclusivement les valeurs 1 et 2 sur le bord de son ensemble de définition.

3. On a $\sigma\binom{a}{1} = a^1 + 1^a = a + 1$ et de même $\sigma\binom{1}{b} = 1 + b$.

4. Soit par l'absurde un couple $(a, b) \in \mathbf{R}_+^2$ où σ atteint un maximum $M := \sigma\binom{a}{b}$. La question 3 donne alors $\sigma\binom{1}{M} = 1 + M > M = \sigma\binom{a}{b}$, ce qui contredit la maximalité de $\sigma\binom{a}{b}$.

5. La fonction Id^a croît (car $a > 0$), donc

$$\sigma\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \underbrace{a^b}_{>0} + \mathrm{Id}^a(b) \overset{b \geq 1}{>} 0 + \mathrm{Id}^a(1) = 1^a = 1.$$

   On demande ensuite de montrer que, si σ admet un minimum sur $\mathbf{R}_+^2$, alors cette valeur minimale est atteinte dans le carré $[0, 1]^2$. Nous allons montrer plus fort, à savoir que, si σ est minimale en un point $p \in \mathbf{R}_+^2$, on a alors nécessairement $p \in [0, 1[^2$.

   Supposons donc que σ admette un minimum en un point $\binom{\lambda}{\mu} \in \mathbf{R}_+^2$. Si $\mu \geq 1$, on vient de montrer plus haut que $\sigma\binom{\lambda}{\mu} > 1 = \sigma\binom{1}{0}$, contredisant la minimalité de $\sigma\binom{\lambda}{\mu}$; de même si $\lambda \geq 1$ vu la symétrie reliant λ et μ. On en déduit que $\lambda < 1$ et $\mu < 1$, *c. q. f. d.*.

6. Posons $\varphi := m \,\mathrm{Id} + m^{\mathrm{Id}}$. La fonction φ est bien définie sur $[0, 1]$ et est infiniment dérivable sur $]0, 1]$: on a

$$\varphi' = m + (\ln m)\, m^{\mathrm{Id}} \text{ et } \varphi'' = (\ln m)^2\, m^{\mathrm{Id}} \geq 0,$$

donc φ' croît sur $]0,1]$; puisque φ' est continue en 0, on en déduit que

$$\begin{aligned}\varphi' &\geq \varphi'(0)\\ &= m+\ln m\\ &= \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}+\ln\left(\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}\right)\\ &= e^{-\frac{1}{e}}+\frac{1}{e}\ln\left(e^{-1}\right)\\ &> e^{-1}-\frac{1}{e}\\ &= 0,\end{aligned}$$

ce qui montre que φ croît strictement sur $]0,1]$; puisque φ est continue en 0, on en déduit qu'elle croît strictement sur $[0,1]$ et est minimale en 0 où elle vaut $\varphi(0)=1$.

7. On a $\sigma\binom{a}{b}=\sigma\binom{b}{a}$, donc on peut supposer (quitte à échanger a et b) que $a\leq b$. On a alors $\tau=\frac{a}{b}$, d'où $a=b\tau$ et

$$\sigma\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=a^b+b^a=(b\tau)^b+b^{b\tau}=b^b\tau^b+\left(b^b\right)^\tau.$$

Or on a $b^b\geq m$ (question 1), d'où par croissance de Id^τ la minoration $\left(b^b\right)^\tau\geq m^\tau$; de même, puisque $b\leq 1$, la décroissance de τ^{Id} (venant de ce que $\tau\leq 1$) fournit $\tau^b\geq\tau$. On déduit de tout cela la minoration

$$\sigma\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=b^b\tau^b+\left(b^b\right)^\tau\geq m\tau+m^\tau,\ c.\ q.\ f.\ d..$$

8. La question 5 montre qu'un éventuel minimum de σ est atteint sur $[0,1[^2$, où (d'après les et avec les notations des questions 6 et 7) on a $\sigma\geq m\tau+m^\tau\geq 1$. La question 2 montrant par ailleurs que 1 est atteint par σ (par exemple en $(1,0)$), on peut conclure que σ possède un minimum (1) atteint au moins sur le bord de son ensemble de définition (origine exclue).

8bis **(bonus : cas d'égalité)** Soit $(a,b)\in\mathbf{R}_+^2$ tel que $a^b+b^a=1$. Avec les notations de la question précédente, les comparaisons $1=\sigma\binom{a}{b}\geq m\tau+m^\tau\geq 1$ forcent les égalités $\varphi(\tau)=\sigma\binom{a}{b}=1=\varphi(0)$, d'où par injectivité de φ (qui est strictement croissante) $\tau=0$, ce qui force a ou b à être nul, *i. e.* le point (a,b) à être sur le bord de l'ensemble de définition de σ. (Réciproquement, on a vu qu'un tel point convenait à l'exception de $(0,0)$.) Conclusion : on a montré que

$$\begin{matrix}\forall a>0\\ \forall b>0\end{matrix},\ a^b+b^a>1$$

(et qu'on ne peut pas remplacer 1 par une valeur strictement supérieure).