# Devoir maison 4 (optionnel)

(à rendre le mercredi 9 janvier)

On définit pour tout couple $(a, b)$ de réels positifs un réel $\sigma\binom{a}{b} := a^b + b^a$. Le but du problème est de déterminer les *extrema* de la fonction $\sigma$ sur le premier quadrant $\mathbf{R}_+^2$.

1. *Étudier la fonction $a \mapsto a^a$ (ensemble de définition, variations, tangentes aux bornes du domaine de définition,* extrema*).*
2. *Décrire les valeurs de la fonction $\sigma$ sur le bord $(\mathbf{R}_+ \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbf{R}_+)$ de son ensemble de définition.*
3. *Soient $a > 0$ et $b > 0$ deux réels. Calculer $\sigma\binom{a}{1}$ et $\sigma\binom{1}{b}$.*
4. *Montrer que la fonction $\sigma$ n'admet pas de maximum sur $\mathbf{R}_+^2$.*
5. *Soient $a > 0$ et $b > 1$ deux réels. Montrer que $\sigma\binom{a}{b} > 1$. En déduire que, si $\sigma$ admet un minimum sur $\mathbf{R}_+^2$, alors on a l'énoncé suivant (dont on demande par ailleurs une interprétation en FRANÇAIS ) :*
$$\exists \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in [0,1]^2, \ \forall \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbf{R}_+^2, \ \sigma \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \leq \sigma \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}.$$
6. *Posons $m := \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$. Étudier les variations de la fonction $\left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & mt + m^t \end{array} \right.$ et donner son éventuel minimum.*
7. *Soit $\binom{a}{b} \in \left]0,1\right]^2$. On pose $\tau := \frac{\min\{a,b\}}{\max\{a,b\}}$. En exprimant l'un des réels $a$ ou $b$ en fonction de l'autre et de $\tau$, montrer que $\sigma\binom{a}{b} \geq m\tau + m^\tau$.*
8. *Conclure quant à un éventuel minimum de $\sigma$ sur $\mathbf{R}_+^2$.*

### Indications

1. revenir à la définition de $a^z$ pour $a > 0$ et $z \in \mathbf{C}$.
2. revenir à la définition de $0^t$ et $t^0$ pour $t \geq 0$.
3. revenir à la définition de $1^t$ et $t^1$ pour $t \geq 0$.
4. raisonner par l'absurde : si $\sigma$ admet un maximum en $\binom{a}{b}$, construire un couple $\binom{a'}{b'}$ tel que $\sigma\binom{a'}{b'} > \sigma\binom{a}{b}$.
5. monotonie de $\beta \mapsto \beta^m$ ?
6. dériver deux fois.
7. expliquer pourquoi on peut supposer $a \leq b$ puis utiliser la question 1 ainsi que les monotonie de $\mathrm{Id}^\tau$ et $\tau^{\mathrm{Id}}$.
8. utiliser les questions 5, 6 et 7.