Devoir maison 4

(à rendre pour le mercredi 9 janvier 2013)

Solution proposée.
Observons dès à présent que, si τ est un réel et P un point de coordonnées (x, y), alors on a les équivalences

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{C}_\tau &\iff F_\tau P = e_\tau \; d(\Delta_t, P) \\ &\iff F_\tau P^2 = (e_\tau \; d(\Delta_0, P))^2 \qquad \text{car tout est positif} \\ &\iff x^2 + (y - \operatorname{sh} \tau)^2 = e^{-2\tau} (x + \operatorname{ch} \tau)^2 . \end{aligned}$$

1. **(3pts)** L'excentricité e_0 vaut $e^{-0} = 1$, donc la conique $\mathcal{C}_0$ est une parabole. Sa directrice Δ_0 a pour équation $x + \operatorname{ch} 0 = 0$, donc est la droite verticale d'abscisse -1. Son foyer F_0 a pour coordonnées $(0, \operatorname{sh} 0)$, donc coïncide avec l'origine. Par conséquent, si P est un point de coordonnées (x, y), on aura les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{C}_0 &\iff x^2 + (y-0)^2 = (x+1)^2 \\ &\iff x^2 + y^2 = x^2 + 2x + 1 \\ &\iff y^2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right) \\ &\iff y'^2 = 2px' \qquad \text{avec } \left\{ \begin{array}{c} x' := x + \frac{1}{2} \\ y' := y \\ p := 1 \end{array} \right. . \end{aligned}$$

La parabole $\mathcal{C}_0$ est donc centrée en $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ et a pour paramètre 1, elle est tournée vers les (nouvelles) abscisses positives.

Un point de $\mathcal{C}_0$ à la verticale du foyer F_0 a pour coordonnées $(0, y)$ où y est un réel vérifiant une équation de $\mathcal{C}_0$ où l'on a remplacé x par 0, par exemple $y^2 = 2 \cdot 0 + 1$, *i. e.* $y = \pm 1$. Un tel point d'ordonnée minimale a donc pour coordonées $(0, -1)$, d'où l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_0$ en ce point (par "dédoublage" des nouvelles inconnues) :

$$y \cdot (-1) = \left(x + \frac{1}{2}\right) + \left(0 + \frac{1}{2}\right), \; i.\ e.\ y = -x - 1.$$

2. **(4pts)** L'excentricité $e_{\ln 2}$ vaut $e^{-\ln 2} = \frac{1}{2} < 1$, donc la conique $\mathcal{C}_{\ln 2}$ est une ellipse. Vu que $\operatorname{ch} \ln 2 = \frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}$, la directrice $\Delta_{\ln 2}$ est la droite verticale d'abscisse $-\frac{5}{4}$. Vu que $\operatorname{sh} \ln 2 = \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$, le foyer $F_{\ln 2}$ a pour coordonnées $\left(0, \frac{3}{4}\right)$. Par conséquent, si P est un point de coordonnées (x, y), on aura les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{C}_{\ln 2} &\iff x^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 \\ &\iff 4x^2 + 4y'^2 = x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} \qquad \text{où } y' := y - \frac{3}{4} \\ &\iff 3x^2 - \frac{5}{2}x + 4y'^2 = \frac{25}{16} \\ &\iff 3\left(x^2 - \frac{5}{6}x + \left(\frac{5}{12}\right)^2\right) + 4y'^2 = 3\left(\frac{5}{12}\right)^2 + \frac{25}{16} \\ &\iff 3\left(x - \frac{5}{12}\right)^2 + 4y'^2 = \frac{25}{3 \cdot 4^2}(1+3) \\ &\iff 3x'^2 + 4y'^2 = \frac{25}{12} \qquad \text{avec } x' := x - \frac{5}{12} \\ &\iff \left(\frac{x'}{\frac{5}{6}}\right)^2 + \left(\frac{y'}{\frac{5}{4\sqrt{3}}}\right)^2 = 1. \end{aligned}$$

L'ellipse $\mathcal{C}_{\ln 2}$ est donc centrée en $\left(\frac{5}{12}, \frac{3}{4}\right)$ et a pour axe focal le nouvel axe des abscisses (d'équation $y = \frac{3}{4}$). Son demi-grand axe est $\frac{5}{6} \simeq 0,83$ et son demi-petit axe $\frac{5}{4\sqrt{3}} \simeq 0,72$. (**Sanity check** : l'excentricité vaut bien $\sqrt{1 - \left(\frac{\frac{5}{4\sqrt{3}}}{\frac{5}{6}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$.)

Un point de $\mathcal{C}_{\ln 2}$ à la verticale du foyer $F_{\ln 2}$ a pour coordonnées $(0, y)$ où y est un réel vérifiant une équation de $\mathcal{C}_{\ln 2}$ où l'on a remplacé x par 0, par exemple $0^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(0 + \frac{5}{4}\right)^2$, *i. e.* $y = \frac{3}{4} \pm \frac{5}{8}$. Un tel point d'ordonnée minimale a donc pour coordonnées $\left(0, \frac{1}{8}\right)$, d'où l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_{\ln 2}$ en ce point (par "dédoublage" des inconnues) :

$$\begin{array}{rcl} 3\left(x - \frac{5}{12}\right)\left(0 - \frac{5}{12}\right) + 4\left(y - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{3}{4}\right) & = & \frac{25}{12}, \\ \textit{i. e.} \text{ (multipliant par } -1) \quad \frac{5}{4}\left(x - \frac{5}{12}\right) + \frac{5}{2}\left(y - \frac{3}{4}\right) & = & -\frac{25}{12}, \\ \textit{i. e.} \text{ (multipliant par 16)} \quad \left(5x - \frac{25}{3}\right) + 10\left(4y - 3\right) & = & -\frac{100}{3}, \\ \textit{i. e.} \quad 20x + 40y & = & 30 - \frac{100}{3} + \frac{25}{3} = 5 \\ \textit{i. e.} \text{ (divisant par 40)} \quad y & = & -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}. \end{array}$$

3. **(4pts)** L'excentricité $e_{-\ln 3}$ vaut $e^{+\ln 3} = 3 > 1$, donc la conique $\mathcal{C}_{-\ln 3}$ est une hyperbole. Vu que $\operatorname{ch}(-\ln 3) = \frac{e^{-\ln 3} + e^{\ln 3}}{2} = \frac{\frac{1}{3} + 3}{2} = \frac{5}{3}$, la directrice $\Delta_{-\ln 3}$ est la droite verticale d'abscisse $-\frac{5}{3}$. Vu que $\operatorname{sh}(-\ln 3) = -\frac{e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}}{2} = -\frac{3 - \frac{1}{3}}{2} = -\frac{4}{3}$, le foyer $F_{-\ln 3}$ a pour coordonnées $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$. Par conséquent, si P est un point de coordonnées (x, y), on aura les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcl} P \in \mathcal{C}_{-\ln 3} & \iff & x^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 = 9\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 \\ & \iff & x^2 + y'^2 = 9x^2 + 30x + 25 \qquad \text{où } y' := y + \frac{4}{3} \\ & \iff & y'^2 = 8x^2 + 30x + 25 \\ & \iff & y'^2 = 8\left(x^2 + \frac{15}{4}x + \left(\frac{15}{8}\right)^2\right) + 25 - 8\left(\frac{15}{8}\right)^2 \\ & \iff & y'^2 = 8\left(x + \frac{15}{8}\right)^2 + \frac{200}{8} - \frac{225}{8} \\ & \iff & 8x'^2 - y'^2 = \frac{25}{8} \qquad \text{avec } x' := x + \frac{15}{8} \\ & \iff & \left(\frac{x'}{\frac{5}{8}}\right)^2 - \left(\frac{y'}{\frac{5}{2\sqrt{2}}}\right)^2 = 1. \end{array}$$

L'hyperbole $\mathcal{C}_{-\ln 3}$ est donc centrée en $\left(-\frac{15}{8}, -\frac{4}{3}\right)$ et a pour axe focal le nouvel axe des abscisses (d'équation $y = -\frac{4}{3}$). Son demi-axe focal est $\frac{5}{8} \simeq 0,63$ et son demi-axe non focal $\frac{5}{2\sqrt{2}} \simeq 1,77$. (**Sanity check** : l'excentricité vaut bien $\sqrt{1 + \left(\frac{\frac{5}{2\sqrt{2}}}{\frac{5}{8}}\right)^2} = \sqrt{1 + 8} = 3$.) On remarquera que le demi-axe non focal est bien plus grand que le demi-axe focal, ce qui témoigne d'un grand écart entre les asymptotes (sanity check : le demi-angle entre ces dernières vaut $\arccos\frac{1}{3} \simeq 70,5°$).

Un point de $\mathcal{C}_{-\ln 3}$ à la verticale du foyer $F_{-\ln 3}$ a pour coordonnées $(0, y)$ où y est un réel vérifiant une équation de $\mathcal{C}_{-\ln 3}$ où l'on a remplacé x par 0, par exemple $0^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 = 9\left(0 + \frac{5}{3}\right)^2$, *i. e.* $y = -\frac{4}{3} \pm 5$. Un tel point d'ordonnée minimale a donc pour coordonnées $\left(0, -\frac{19}{3}\right)$, d'où l'équation de la tangente à

$\mathcal{C}_{-\ln 3}$ en ce point :

$$\begin{aligned} 8\left(x+\frac{15}{8}\right)\left(0+\frac{15}{8}\right)-\left(y+\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{19}{3}+\frac{4}{3}\right) &= \frac{25}{8}, \\ i.\ e.\qquad 15\left(x+\frac{15}{8}\right)+5\left(y+\frac{4}{3}\right) &= \frac{25}{8}, \\ i.\ e.\ \text{(simplifiant par 5)}\qquad 3x+y &= \frac{5}{8}-\frac{45}{8}-\frac{4}{3}, \\ i.\ e.\qquad y &= -3x-\frac{19}{3}. \end{aligned}$$

On pourra observer que la pente trouvée est proche (en valeur absolue) de celle $2\sqrt{2}\simeq 2.83$ des asymptotes.

4. **(1pt)** Un point P de coordonnées (x,y) appartient à $\mathcal{C}_\tau$ et à l'axe des ordonnées ssi $x=0$ et si P vérifie une équation de $\mathcal{C}_\tau$. Lorsque $x=0$, une telle équation est

$$\begin{aligned} (0)^2+(y-\operatorname{sh}\tau)^2 &= e^{-2\tau}\ (0+\operatorname{ch}\tau)^2, \\ i.\ e.\qquad y &= \operatorname{sh}\tau\pm e^{-\tau}\operatorname{ch}\tau. \end{aligned}$$

Les points cherchés sont donc $\frac{1}{2}\left(0,e^{\tau}+1-e^{-\tau}+e^{-2\tau}\right)$ et $\frac{1}{2}\left(0,e^{\tau}-1-e^{-\tau}-e^{-2\tau}\right)$.

5. **(2pts)** Puisque l'axe focal de $\mathcal{C}_\tau$ est horizontal, un point de coordonnées (x,y) appartient à cet axe ssi son ordonnée vaut celle du foyer F_τ. Sous cette condition $y=\operatorname{sh}\tau$, l'équation de $\mathcal{C}_\tau$ devient

$$\begin{aligned} x^2+0^2 &= e^{-2\tau}\,(x+\operatorname{ch}\tau)^2 \\ \iff (e^{\tau}x)^2 &= (x+\operatorname{ch}\tau)^2 \\ \iff \pm e^{\tau}x &= x+\operatorname{ch}\tau \\ \overset{\text{si } e^{\tau}\neq 1}{\iff} x &= \frac{\operatorname{ch}\tau}{-1\pm e^{\tau}}. \end{aligned}$$

Lorsque $\tau\neq 0$, les points recherchés sont donc $\frac{1}{2}\left(\frac{e^{\tau}+e^{-\tau}}{e^{\tau}-1},e^{\tau}-e^{-\tau}\right)$ et $\frac{1}{2}\left(-\frac{e^{\tau}+e^{-\tau}}{e^{\tau}+1},e^{\tau}-e^{-\tau}\right)$. Lorsque $\tau=0$, l'équation ci-dessus devient $\pm x=x+1$, *i. e.* $x=-\frac{1}{2}$, d'où le point recherché $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ (sanity check : une parabole a *un seul* sommet).

6. **(3pts)** Soit (x,y) un point appartenant à tous les $\mathcal{C}_\tau$ lorsque τ parcourt $\mathbf{R}$. On a donc

$$\forall\tau\in\mathbf{R},\ x^2+(y-\operatorname{sh}\tau)^2=e^{-2\tau}\,(x+\operatorname{ch}\tau)^2.$$

Heuristiquement, lorsque τ est très grand, $\operatorname{sh}\tau$ et $\operatorname{ch}\tau$ sont tous deux très grands devant x et y, donc l'équation pourrait se réécrire en première approximation $\operatorname{sh}^2\tau\simeq e^{-2\tau}\operatorname{ch}^2\tau$, *i. e.* $\operatorname{th}\tau\simeq e^{-\tau}$, ou encore (d'après les limites connues en ∞) $1\simeq 0$, ce qui est complètement faux. Pour formaliser ce qui précède, on va diviser les deux membres de l'équation ci-dessus par le terme dominant $\left(\frac{e^{\tau}}{2}\right)^2$ puis faire tendre τ vers l'infini.

Soit $\tau\in\mathbf{R}$. En divisant par $\left(\frac{e^{\tau}}{2}\right)^2$ la relation $x^2+(y-\operatorname{sh}\tau)^2=e^{-2\tau}\,(x+\operatorname{ch}\tau)^2$, on obtient

$$\frac{4x^2}{e^{2\tau}}+\left(\frac{4y}{e^{\tau}}-\left(1-e^{-2\tau}\right)\right)^2=e^{-2\tau}\left(\frac{4x}{e^{\tau}}+\left(1+e^{-2\tau}\right)\right)^2.$$

Lorsque $\tau\to\infty$, le terme membre de gauche tend vers $0+(0-1)^2=1$ tandis que celui de droite tend vers $0\,(0+(1+0))^2=0$, ce qui est une contradiction.

Finalement, l'intersection des $\mathcal{C}_\tau$ lorsque τ varie dans $\mathbf{R}$ est vide :

$$\bigcap_{\tau e\mathbf{R}}\mathcal{C}_\tau=\emptyset.$$

7. **(4pts)** Suivons l'ordre de l'énoncé et étudions tout d'abord les polynômes $\begin{cases} P:=X^3-X^2-X-1 \\ Q:=X^3+X^2-X+1 \end{cases}$ (où X désigne l'indéterminée).

On a $P'=3X^2-2X-1=(3X+1)(X-1)$, trinôme qui prend des valeurs négatives sur $\left[-\frac{1}{3},1\right]$ et positives ailleurs, d'où les variations de P : croissant de $-\infty$ à $-\frac{1}{3}$, décroissant de $-\frac{1}{3}$ à 1 puis croissant de

1 à l'infini. Puisque $P\left(-\frac{1}{3}\right) = \underbrace{-\frac{1}{27} - \frac{1}{9}}_{<0} \underbrace{+\frac{1}{3} - 1}_{<0} < 0$, la fonction P reste strictement négative sur $\left]-\infty, 1\right]$; puisqu'elle croît strictement sur $\left[1, \infty\right[$ et a pour limite ∞ en ∞, elle s'annule par continuité une unique fois sur cet intervalle. En observant par ailleurs que $P(2) = 8 - 4 - 2 - 1 = 1 > 0$, on voit que ce zéro est strictement inférieur à 2. Il en résulte que P ademt une unique racine réelle α, laquelle est comprise entre 1 et 2 strictement.

On a $Q' = 3X^2 + 2X - 1 = (3X - 1)(X + 1)$, trinôme qui prend des valeurs négatives sur $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$ et positives ailleurs, d'où les variations de Q : croissant de $-\infty$ à -1, décroissant de -1 à $\frac{1}{3}$ puis croissant de $\frac{1}{3}$ à l'infini. Puisque $Q\left(\frac{1}{3}\right) = \underbrace{\frac{1}{27} + \frac{1}{9}}_{>0} \underbrace{-\frac{1}{3} + 1}_{>0} > 0$, la fonction Q reste strictement positive sur $\left[-1, \infty\right[$; puisqu'elle croît strictement sur $\left]-\infty, -1\right]$ et a pour limite $-\infty$ en $-\infty$, elle s'annule par continuité une unique fois sur cet intervalle. En observant par ailleurs que $Q(-2) = -8 + 4 + 2 + 1 = -1 < 0$, on voit que ce zéro est strictement supérieur à -2. Il en résulte que Q ademt une unique racine réelle β, laquelle est comprise entre -2 et -1 strictement.

En fait, en remarquant que $P(-\beta) = -\beta^3 - \beta^2 + \beta - 1 = -Q(\beta) = -0$, on obtient l'égalité $\beta = -\alpha$.

Soit à présent $\tau \in \mathbf{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\text{l'origine appartient à } \mathcal{C}_\tau \quad & \iff \quad 0^2 + (0 - \operatorname{sh}\tau)^2 = e^{-2\tau}(0 + \operatorname{ch}\tau)^2 \\
& \iff \quad \operatorname{sh}^2\tau = e^{-2\tau}\operatorname{ch}^2\tau \\
& \iff \quad e^\tau \operatorname{sh}\tau = \pm \operatorname{ch}\tau \\
& \iff \quad e^{2\tau} - 1 = \pm\left(e^\tau + e^{-\tau}\right) \\
& \iff \quad e^{3\tau} - e^\tau = \pm\left(e^{2\tau} + 1\right) \\
& \iff \quad e^\tau \text{ est racine d'un des polynômes } X^3 - X \pm \left(X^2 + 1\right) \\
& \iff \quad e^\tau \in \{\alpha, \beta\} \\
& \iff \quad e^\tau = \alpha \qquad \text{car } \beta < 0 < \alpha \\
& \iff \quad \tau \in \ln\alpha.
\end{aligned}$$

Remarque. Lorsque $O \in \mathcal{C}_\tau$, cette dernière conique est d'excentricité $e_\tau = e_{\ln\alpha} = e^{-\ln\alpha} = \frac{1}{\alpha} \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$, donc est une ellipse.

7bis. Explicitons α en appliquant la méthode de Tartaglia pour exprimer les racines d'un polynôme du troisième degré.

On part de l'égalité $\alpha^3 = \alpha^2 + \alpha + 1$ définissant α. Pour se débarasser du terme α^2 de degré 2, on "translate" l'inconnue α en écrivant $\alpha = \frac{A+1}{3}$ (ce qui revient à poser $A := 3\alpha - 1$) : on obtient alors d'une part $27\alpha^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + 1$, d'autre part $27\left(\alpha^2 + \alpha + 1\right) = 3\left(A^2 + 2A + 1\right) + 9(A + 1) + 27$, d'où l'égalité $A^3 = 12A + 38$ (il n'y a plus de A^2).

Décomposons ensuite $A = u + v$ où u et v sont deux réels fixés à choisir judicieusement. On obtient après substitution $12(u + v) + 38 = (u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v)$, d'où $u^3 + v^3 = 38 + 3\boxed{(4 - uv)}(u + v)$. Ainsi, si l'on peut imposer $uv = 4$, les réels u^3 et v^3 devront avoir pour somme 38 et produit 64, donc devront être racines du trinôme $X^2 - 38X + 64 = (X - 19)^2 + \underbrace{64 - 19^2}_{-297}$ et valoir $19 \pm \sqrt{297}$.

Proprement, le paragraphe précédent permet d'affirmer les équivalences suivantes (à u et v réels fixés)

$$\left\{\begin{array}{c} A^3 = 12A + 18 \\ A = u + v \\ uv = 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} A = u + v \\ u^3 + v^3 = 38 \\ u^3v^3 = 64 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} A = u + v \\ \left\{u^3, v^3\right\} = \left\{19 \pm \sqrt{297}\right\} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} A = \sqrt[3]{19 + \sqrt{297}} + \sqrt[3]{19 - \sqrt{297}} \\ \{u, v\} = \left\{\sqrt[3]{19 \pm \sqrt{297}}\right\} \end{array}\right. .$$

On en déduit que le réel $\sqrt[3]{19 + \sqrt{297}} + \sqrt[3]{19 - \sqrt{297}}$ est (comme A) racine de $X^3 - 12X - 18$; or une brève étude de fonction montrerait que ce dernier polynôme ne s'annule qu'une fois sur $\mathbf{R}$, d'où la valeur de A et une expression de $\alpha = \frac{1+A}{3}$ sous forme de radicaux emboîtés :

$$\alpha = \frac{1}{3}\left(1 + \sqrt[3]{19 + \sqrt{297}} + \sqrt[3]{19 - \sqrt{297}}\right) \simeq 1,839 \qquad \text{(on en tire } \ln\alpha \simeq 0,452\text{).}$$