Devoir maison 4

(à rendre pour le jeudi 10 janvier 2013)

On fixe pour tout le problème un plan muni d'un repère orthonormé.

On définit pour tout réel τ :

1. une droite Δ_τ d'équation cartésienne $x + \operatorname{ch} \tau = 0$;
2. un point F_τ de coordonnées cartésiennes $(0, \operatorname{sh} \tau)$;
3. un réel $e_\tau := e^{-\tau}$;
4. une conique $\mathcal{C}_\tau$ de foyer F_τ, directrice Δ_τ et excentricité e_τ.

Questions.

1. *Déterminer $\mathcal{C}_0$ (équation cartésienne réduite, type de conique, paramètre ou demi-axes, tracé) et donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_0$ en le point d'ordonnée minimale situé à la verticale du foyer F_0.*
2. *Déterminer $\mathcal{C}_{\ln 2}$ (équation cartésienne réduite, type de conique, paramètre ou demi-axes, tracé) et donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_{\ln 2}$ en le point d'ordonnée minimale situé à la verticale du foyer $F_{\ln 2}$.*
3. *Déterminer $\mathcal{C}_{-\ln 3}$ (équation cartésienne réduite, type de conique, paramètre ou demi-axes, tracé) et donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_{-\ln 3}$ en le point d'ordonnée minimale situé à la verticale du foyer $F_{-\ln 3}$.*
4. *Soit $\tau \in \mathbf{R}$. Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}_\tau$ avec l'axe des ordonnées.*
5. *Soit $\tau \in \mathbf{R}$. Déterminer les sommets de $\mathcal{C}_\tau$ (*i. e.* l'intersection de $\mathcal{C}_\tau$ avec son axe focal).*
6. *Trouver les points du plan qui appartiennent à toutes les coniques $\mathcal{C}_\tau$ pour τ décrivant $\mathbf{R}$. (On pourra regarder ce qui se passe pour des grands τ.)*
7. *Trouver les réels τ pour lesquels l'origine du plan appartient à $\mathcal{C}_\tau$. On commencera par établir que les deux quadrinômes $X^3 - X \pm \left(X^2 + 1\right)$ ont chacun une unique racine réelle et l'on exprimera les réels cherchés en fonction de ces racines.*