Devoir maison 3

Solution proposée.

Lemme préliminaire. (3pts)

Soit t un réel. La fonction tangente a pour image $\mathbf{R}$, plus précisément la restriction de tan à $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ est d'image $\mathbf{R}$; on peut donc écrire t comme la tangente d'un angle θ tel que $|\theta|<\frac{\pi}{2}$. On en déduit

$$\frac{1+ti}{t+i}=\frac{1+i\tan\theta}{i\left(1-\tan\theta\right)}=\frac{1}{i}\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}=-i\frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}}=e^{i\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Lorsque t décrit $\mathbf{R}$, l'angle θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, donc l'argument $2\theta-\frac{\pi}{2}$ décrit $\left]-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, donc $\frac{1+ti}{t+i}=e^{i\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$ décrit tout $\mathbf{U}$ à l'exception de $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$, *c. q. f. d.*.

La fonction h. (13pts)

1. **(1pt)** Soit $z\in\mathbf{C}$. Le complexe $h\left(z\right)$ est bien défini si et seulement si le dénominateur $z-i$ est non nul, ce qui montre que la fonction h est définie sur $\mathbf{C}\setminus\{i\}$ et y prend des valeurs complexes. Puisque h n'est pas définie en i, ce n'est pas une application de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{C}$.
2. **(3pt)** La relation $h\left(a\right)=b$ n'ayant pas de sens pour $a=i$, on supposera $a\neq i$ par la suite. La relation $h\left(a\right)=b$ s'écrit alors $b=\frac{1}{a-i}$, *i. e.* (si $b\neq 0$) $a-i=\frac{1}{b}$, *i. e.* $a=i+\frac{1}{b}$. On déduit que l'image de h vaut $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ (donc h n'est pas surjective sur tout $\mathbf{C}$) et que h est injective de réciproque $i+\frac{1}{\mathrm{Id}}$.
3. **(1pt)** Soit $a\in\mathbf{C}\setminus\{i\}$. On a les équivalences $h\left(a\right)=a\iff\frac{1}{a-i}=a\iff 1=a^2-ia\iff a^2-ia-1=0$. Le discriminant du trinôme X^2-iX-1 vaut $\left(i\right)^2+4=3$, donc l'égalité précédente en a équivaut à $a=\frac{i\pm\sqrt{3}}{2}$, *i. e.* à $a\in\left\{e^{i\frac{\pi}{6}},e^{5i\frac{\pi}{6}}\right\}$.
4. **(2pts)** Soit θ un réel. On a
$$h\left(i+e^{i\theta}\right)=\frac{1}{\left(i+e^{i\theta}\right)-i}=\frac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}.$$
Ainsi, lorsque θ décrit $\mathbf{R}$, l'argument $-\theta$ décrit lui aussi tout $\mathbf{R}$, donc $h\left(i+e^{i\theta}\right)$ décrit le cercle de centre 0 et de rayon 1. L'image cherchée $h\left(i+\mathbf{U}\right)$ est donc le cercle unité $\mathbf{U}$.
5. **(2pts)** Soit t un réel non nul. On a
$$h\left(t+i\right)=\frac{1}{\left(t+i\right)-i}=\frac{1}{t}.$$
Lorsque t parcourt $\mathbf{R}^*$, l'image $h\left(t+i\right)=\frac{1}{t}$ parcourt $\mathbf{R}^*$. L'image cherchée $h\left(\mathbf{R}^*+i\right)$ est donc la droite épointée $\mathbf{R}^*$.
6. **(2pts)** Soit $u\in\mathbf{U}\setminus\{i\}$. Le lemme préliminaire nous dit que u s'écrit $\frac{1+ti}{t+i}$ pour un réel t, d'où
$$h\left(u\right)=\frac{1}{\frac{1+ti}{t+i}-i}=\frac{t+i}{\left(1+ti\right)-i\left(t+i\right)}=\frac{t+i}{2}=\frac{t}{2}+\frac{i}{2}.$$
Lorsque u décrit tout $\mathbf{U}\setminus\{i\}$, le réel t décrit tout $\mathbf{R}$, donc l'image $h\left(u\right)=\frac{t}{2}+\frac{i}{2}$ décrit toute la droite passant par $\frac{i}{2}$ et dirigée par le vecteur $\frac{1}{2}$. L'image cherchée $h\left(\mathbf{U}\setminus\{i\}\right)$ est donc $\mathbf{R}+\frac{i}{2}$.
7. **(2pts)** [une jolie figure] (observer que les deux points fixes sont à l'intersection du cercle $\mathbf{U}+i$ et de son image $\mathbf{U}$, ainsi qu'à l'intersection du "cercle" $\mathbf{C}\setminus\{i\}$ et son image $\mathbf{R}+\frac{i}{2}$)

La fonction H. (13pts)

1. **(1pt)** Soit $z\in\mathbf{C}$. Le complexe $H\left(z\right)$ est bien défini si et seulement si le dénominateur $z-i$ est non nul, ce qui montre que la fonction H est définie sur $\mathbf{C}\setminus\{i\}$ et y prend des valeurs complexes. Puisque H n'est pas définie en i, ce n'est pas une application de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{C}$.

2. **(3pt)** La relation $H(a) = b$ n'ayant pas de sens pour $a = i$, on supposera $a \neq i$ par la suite. La relation $h(a) = b$ s'écrit alors $b = \frac{5+2a}{a-i} = 2 + \frac{5+2i}{a-i}$, *i. e.* $b - 2 = \frac{5+2i}{a-i}$, *i. e.* (si $b \neq 2$) $a - i = \frac{5+2i}{b-2}$, *i. e.* $a = \frac{5+2i}{b-2} + i = \frac{5+ib}{b-2}$. On déduit que l'image de H vaut $\mathbf{C} \setminus \{2\}$ (donc H n'est pas surjective sur tout $\mathbf{C}$) et que H est injective de réciproque $\frac{5+i \operatorname{Id}}{\operatorname{Id} - 2}$.
3. **(1pt)** Soit $a \in \mathbf{C} \setminus \{i\}$. On a les équivalences $H(a) = a \iff \frac{5+2a}{a-i} = a \iff 5 + 2a = a^2 - ia \iff a^2 - (2+i)a - 5 = 0$. Le discriminant du trinôme $X^2 - (2+i)X - 5$ vaut $(2+i)^2 + 4 \cdot 5 = 23 + 4i$, donc l'égalité précédente en a équivaut à $a = \frac{2+i \pm \sqrt{23+4i}}{2}$.
4. **(2pts)** Soit θ un réel. On a

$$H\left(i + e^{i\theta}\right) = \frac{5 + 2\left(i + e^{i\theta}\right)}{\left(i + e^{i\theta}\right) - i} = \frac{5 + 2i + 2e^{i\theta}}{e^{i\theta}} \overset{\alpha := \arg(5+2\iota)}{=} 2 + \frac{\sqrt{5^2 + 2^2} e^{i\alpha}}{e^{i\theta}} = 2 + \sqrt{29} e^{i(\alpha - \theta)}.$$

Ainsi, lorsque θ décrit $\mathbf{R}$, l'argument $\alpha - \theta$ décrit lui aussi tout $\mathbf{R}$, donc $H\left(i + e^{i\theta}\right)$ décrit le cercle $\sqrt{29}\mathbf{U} + 2$ de centre 2 et de rayon $\sqrt{29}$.
5. **(2pts)** Soit t un réel non nul. On a

$$H(t + i) = \frac{5 + 2(t + i)}{(t + i) - i} = \frac{5 + 2t + 2i}{t} = 2 + \frac{5 + 2i}{t}.$$

Lorsque t parcourt $\mathbf{R}^*$, l'image $2 + \frac{5+2i}{t}$ parcourt $2 + \mathbf{R}^*(5 + 2i)$, qui est la droite passant par 2 et dirigée par le vecteur $5 + 2i$ dont on a "coupé" le point 2. L'image cherchée $H(\mathbf{R}^* + i)$ est donc la droite épointée $2 + \mathbf{R}^*(5 + 2i)$.
6. **(2pts)** Soit $u \in \mathbf{U} \setminus \{i\}$. Le lemme préliminaire nous dit que u s'écrit $\frac{1+ti}{t+i}$ pour un réel t, d'où

$$H(u) = \frac{5 + 2\frac{1+ti}{t+i}}{\frac{1+ti}{t+i} - i} = \frac{5(t+i) + 2(1+it)}{(1+ti) - i(t+i)} = \frac{(2+5i) + t(5+2i)}{2} = \left(1 + \frac{5i}{2}\right) + t\left(\frac{5}{2} + i\right).$$

Lorsque u décrit tout $\mathbf{U} \setminus \{i\}$, le réel t décrit tout $\mathbf{R}$, donc l'image $\left(1 + \frac{5i}{2}\right) + t\left(\frac{5}{2} + i\right)$ décrit toute la droite passant par $1 + \frac{5i}{2}$ et dirigée par le vecteur $\frac{5}{2} + i$. L'image cherchée $H(\mathbf{U} \setminus \{i\})$ est donc la droite $\mathbf{R}(5 + 2i) + 1 + \frac{5i}{2}$.
7. **(2pts)** [une jolie figure] (observer que les deux points fixes sont à l'intersection du cercle $\mathbf{U} + i$ et de son image $\sqrt{29}\mathbf{U} + 2$, ainsi qu'à l'intersection du "cercle" $\mathbf{C} \setminus \{i\}$ et son image $\mathbf{R}(5 + 2i) + 1 + \frac{5i}{2}$)

Les matrices. (15pts)

1. **(1pt)** Soit $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice. On a par définition

$$\begin{aligned} F * \widetilde{F} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & a(-b) + ba \\ cd + d(-c) & c(-b) + da \end{pmatrix} = |F| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \widetilde{F} * F &= \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} da + (-b)c & db + (-b)d \\ (-c)a + ac & (-c)b + ad \end{pmatrix} = |F| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. **(2pts)** Soient $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\Phi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ deux matrices. Par définition, on a

$$\begin{aligned} |F * \Phi| &= \begin{vmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{vmatrix} \\ &= (a\alpha + b\gamma)(c\beta + d\delta) - (a\beta + b\delta)(c\alpha + d\gamma) \\ &= \underline{ac\alpha\beta} + ad\alpha\delta + bc\beta\gamma + \underbrace{bd\gamma\delta} \underline{- ac\alpha\beta} - ad\beta\gamma - bc\alpha\delta \underbrace{- bd\gamma\delta} \\ &= ad\alpha\delta + bc\beta\gamma - ad\beta\gamma - bc\alpha\delta \\ &= (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma) \\ &= |F| |\Phi|. \end{aligned}$$

En échangeant les rôles de F et Φ et en utilisant la commutativité du produit dans $\mathbf{C}$, on en déduit $|\Phi * F| = |\Phi| |F| = |F| |\Phi| = |F * \Phi|$.

3. **(2pts)** Soient $F=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\Phi=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ et $\mathcal{F}=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ trois matrices. On a par définition

$$\begin{aligned}
F*(\Phi*\mathcal{F}) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \alpha A+\beta C & \alpha B+\beta D \\ \gamma A+\delta C & \gamma B+\delta D \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a(\alpha A+\beta C)+b(\gamma A+\delta C) & a(\alpha B+\beta D)+b(\gamma B+\delta D) \\ c(\alpha A+\beta C)+d(\gamma A+\delta C) & c(\alpha B+\beta D)+d(\gamma B+\delta D) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a\alpha A+\underline{a\beta C+b\gamma A}+b\delta C & a\alpha B+\underline{a\beta D+b\gamma B}+b\delta D \\ c\alpha A+\underline{c\beta C+d\gamma A}+d\delta C & c\alpha B+\underline{c\beta D+d\gamma B}+d\delta D \end{pmatrix} \text{ et} \\
(F*\Phi)*\mathcal{F} &= \begin{pmatrix} a\alpha+b\gamma & a\beta+b\delta \\ c\alpha+d\gamma & c\beta+d\delta \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a\alpha+b\gamma)A+(a\beta+b\delta)C & (a\alpha+b\gamma)B+(a\beta+b\delta)D \\ (c\alpha+d\gamma)A+(c\beta+d\delta)C & (c\alpha+d\gamma)B+(c\beta+d\delta)D \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a\alpha A+\underline{b\gamma A+a\beta C}+b\delta C & a\alpha B+\underline{b\gamma B+a\beta D}+b\delta D \\ c\alpha A+\underline{d\gamma A+c\beta C}+d\delta C & c\alpha B+\underline{d\gamma B+c\beta D}+d\delta D \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

d'où l'égalité $F*(\Phi*\mathcal{F})=(F*\Phi)*\mathcal{F}$ en réordonnant les deuxième et troisième termes (soulignés) de chaque coordonnée.

Quelques essais suggèrent que la matrice $I:=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est neutre pour $*$, comme on le vérifie aisément :

$$\begin{aligned}
F*I &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a1+b0 & a0+b1 \\ c1+d0 & c0+d1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = F, \\
I*F &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1a+0c & 1b+0d \\ 0a+1c & 0b+1d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = F.
\end{aligned}$$

4. **(2pts)** Il y a cinq matrices à considérer, appelons-les $\nwarrow:=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\searrow:=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\nearrow:=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\swarrow:=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $o:=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On obtient après calculs la table de composition suivante :

$* \Rsh$	o	$\nwarrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\swarrow$
o	o	o	o	o	o
$\nwarrow$	o	$\nwarrow$	o	$\nearrow$	o
$\searrow$	o	o	$\searrow$	o	$\swarrow$
$\nearrow$	o	o	$\nearrow$	o	$\nwarrow$
$\swarrow$	o	$\swarrow$	o	$\searrow$	o

On constate que le tableau n'est pas symétrique par rapport à sa diagonale principale (par exemple $\nearrow*\nwarrow=o\neq\nearrow=\nwarrow*\nearrow$), ce qui traduit la non-commutativité de $*$, d'où (a). Le tableau contient par ailleurs d'autres o que sur les premières ligne et colonne (par exemple $\nwarrow*\searrow=0$), d'où (b). On voit enfin que les matrices $\nwarrow$ et $\searrow$ sont chacune égale à leur carré, d'où (c).

5. **(3pts)** Soit z un complexe. Dès lors que les quotients suivants font sens, on a

$$\begin{aligned}
[h_\Phi\circ h_F](z) &= h_\Phi(h_F(z)) \\
&= h_\Phi\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \\
&= \frac{\alpha\frac{az+b}{cz+d}+\beta}{\gamma\frac{az+b}{cz+d}+\delta} \\
&= \frac{\alpha(az+b)+\beta(cz+d)}{\gamma(az+b)+\delta(cz+d)} \\
&= \frac{(\alpha a+\beta c)z+(\alpha b+\beta d)}{(\gamma a+\delta c)z+(\gamma b+\delta d)} \\
&= h_{\begin{pmatrix} \alpha a+\beta c & \alpha b+\beta d \\ \gamma a+\delta c & \gamma b+\delta d \end{pmatrix}}(z) \\
&= h_{\Phi*F}(z),
\end{aligned}$$

d'où l'égalité voulue.

Soit $\lambda \in \mathbf{C}$: on a $h_{\lambda I} = h_{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}} = \frac{\lambda \operatorname{Id}_{\mathbf{C}} + 0}{0 \operatorname{Id}_{\mathbf{C}} + \lambda} = \operatorname{Id}_{\mathbf{C}}$. Soit F une matrice. Lorsque $|F| \neq 0$, la question 1 permet ainsi d'écrire $h_{\widetilde{F}} \circ h_F = h_{\widetilde{F} * F} = h_{|F| I} = \operatorname{Id}$ et de même $h_F \circ h_{\widetilde{F}} = \operatorname{Id}$, ce qui montre que h_F est inversible d'inverse $h_{\widetilde{F}}$.

6. **(2pts)** On a par exemple $h = h_{\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -i \end{pmatrix}} = h_{\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 2 & -2i \end{pmatrix}}$. En posant $F := \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, on obtient $\widetilde{F} = \begin{pmatrix} -i & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, d'où

$$h^{-1} = h_F^{-1} = h_{-\widetilde{F}} = h_{\begin{pmatrix} i & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}} = \frac{i \operatorname{Id} + 5}{\operatorname{Id} - 2}$$

(sanity check : c'est bien ce qu'on avait trouvé plus haut).

7. **(3pts)** (On n'écrira plus les $*$ pour alléger). Le calcul donne $PQ = I = QP$ et $P\Delta Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, d'où l'on déduit

$$\left[\frac{\operatorname{Id} + 1}{1 - \operatorname{Id}}\right]^{\circ 18} = \left[h_{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}\right]^{\circ 18} = \left[h_{P\Delta Q}\right]^{\circ 18} \overset{\text{question } 5}{=} h_{(P\Delta Q)^{18}}.$$

Or les puissances de $P\Delta Q$ sont aisées à intuiter : en regardant le carré, on trouve

$$(P\Delta Q)^2 = (P\Delta Q)(P\Delta Q) = P\Delta \underbrace{(QP)}_{=I} \Delta Q = P\Delta\Delta Q = P\Delta^2 Q$$

et l'on montrerait, grâce à la simplification $QP = I$, par récurrence que $(P\Delta Q)^n = P\Delta^n Q$ pour tout entier $n \geq 0$. On en déduit

$$\begin{aligned}
(P\Delta Q)^{18} &= P\Delta^{18} Q \\
&= P \begin{pmatrix} \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix}^{18} Q \\
&= P \begin{pmatrix} \left(\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{18} & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{18} \end{pmatrix} Q \\
&= P \begin{pmatrix} 2^9 e^{-i\frac{9\pi}{2}} & 0 \\ 0 & 2^9 e^{i\frac{9\pi}{2}} \end{pmatrix} Q \\
&= \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^9 e^{-i\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & 2^9 e^{i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} \\
&= 2^8 i \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} \\
&= 2^8 i \begin{pmatrix} -i & -i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} \\
&= 2^8 i \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Finalement, on trouve $h_{(P\Delta Q)^{18}} = h_{(2^8 i)(2i) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = h_{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \frac{0 \operatorname{Id} - 1}{\operatorname{Id} + 0} = \frac{-1}{\operatorname{Id}}$, d'où

$$\left[\frac{\operatorname{Id} + 1}{1 - \operatorname{Id}}\right]^{\circ 18} (42) = -\frac{1}{42}.$$