Devoir maison 3

(à rendre pour le lundi 26 novembre)

On note $\mathbf{U}$ le cercle unité de $\mathbf{C}$, h la fonction $\frac{1}{\mathrm{Id}_{\mathbf{C}}-i}$ et H la fonction $\frac{5+2\,\mathrm{Id}_{\mathbf{C}}}{\mathrm{Id}_{\mathbf{C}}-i}$.

Lemme préliminaire. *Montrer que* $\mathbf{U}$ *privé du point* i *vaut l'image de l'application* $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \frac{1+ti}{t+i}\end{array}\right.$ (indication : que vaut $\operatorname{Im}\tan$?).

1. En quels points la fonction h est-elle définie ? Est-elle une application de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{C}$?
2. Soit a et b deux complexes. Résoudre l'équation $h(a) = b$ en l'inconnue a. La fonction h est-elle injective ? surjective ? Préciser $\operatorname{Im} h$ et – le cas échéant – la réciproque h^{-1}.
3. Déterminer les points fixes de la fonction h.
4. Montrer que l'image par h du cercle $i + \mathbf{U}$ est un cercle que l'on déterminera.
5. Déterminer l'image de la droite "coupée" $\mathbf{R}^* + i$ par la fonction h.
6. Prouver que l'image par h du cercle $\mathbf{U}$ privé du point i est une droite que l'on précisera.
7. Placer sur une même figure les objets géométriques des questions 3 à 6.
8. Reprendre les sept questions précédentes en remplaçant h par H.

On appelle ***matrice*** tout quadruplet de complexes. On écrira une matrice sous la forme d'un tableau $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Soit $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice. On note $|F|$ le complexe $ad - bc$, h_F la fonction $\frac{a\,\mathrm{Id}_{\mathbf{C}}+b}{c\,\mathrm{Id}_{\mathbf{C}}+d}$ et $\widetilde{F}$ la matrice $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Si λ est un complexe, on note λF la matrice $\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$. Si $\Phi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ est une autre matrice, on note $F * \Phi$ la matrice $\begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sera dite ***nulle***.

1. Montrer que $F * \widetilde{F} = \widetilde{F} * F$ pour toute matrice F.
2. Montrer que $|F * \Phi| = |F|\,|\Phi| = |\Phi * F|$ pour toutes matrices F et Φ.
3. Montrer que $*$ est associative et admet un neutre que l'on notera I.
4. Montrer que l'ensemble des matrices possédant exactement une ou aucune coordonnée égale à 1 (les autres coordonnées étant toutes nulles) est stable par la loi $*$ (on pourra dresser une table de composition par $*$ de ces matrices). En déduire que :
   (a) la loi $*$ n'est pas commutative ;
   (b) l'équation $F^{*2} = F$ (en l'inconnue matricielle F) a d'autres solutions que les matrices nulle et neutre ;
   (c) la nullité d'un produit $F * \Phi$ de deux matrices n'assure pas celle de F ou de Φ.
5. Soient F et Φ deux matrices. Montrer que $h_\Phi \circ h_F = h_{\Phi * F}$. Que vaut $h_{\lambda I}$ pour $\lambda \in \mathbf{C}^*$? En déduire que h_F^{-1} a du sens dès que $|F| \neq 0$ et déterminer alors h_F^{-1} en fonction de $\widetilde{F}$.
6. Donner deux matrices distinctes F et Φ telles que $h_F = h = h_\Phi$. Calculer $\widetilde{F}$ et en déduire h^{-1} par une autre méthode qu'à la question 2 de la première partie. Même question en remplaçant h par H.
7. On pose $P := \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Q := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$ et $\Delta := \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}$. Calculer $P * Q$ et $Q * P$ puis $P * \Delta * Q$. En déduire $\left[\frac{\mathrm{Id}+1}{1-\mathrm{Id}}\right]^{\circ 18}(42)$.