Devoir maison n◦2

Solution proposée.

Préliminaires.

1. Notons c une fonction dont le graphe est la corde reliant $\binom{a}{f(a)}$ à $\binom{b}{f(b)}$: puisque $\binom{c(a)}{c(b)} = \binom{f(a)}{f(b)}$, la fonction $f - c$ s'annule en a et b, d'où par le résultat admis un $p \in]a, b[$ annulant la dérivée $f' - c'$. Or la fonction c est affine de pente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (celle de la corde), donc sa dérivée vaut constamment $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ce qui montre que $f'(p) = c'(p) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
2. Soit $M \in [ab]$. On a envie de voir M comme le barycentre des points pondérés $\binom{a}{bM}$ et $\binom{b}{aM}$, ce qui s'écrit $M \overset{?}{=} \frac{bM}{aM+bM}a + \frac{aM}{aM+bM}b$. Le réel $\lambda := \frac{bM}{aM+bM}$ est positif, plus petit que $\frac{bM}{0+bM} = 1$ et vérifie $1 - \lambda = 1 - \frac{bM}{aM+bM} = \frac{aM}{aM+bM}$, donc l'égalité précédente se réécrit $M \overset{?}{=} \lambda a + (1-\lambda) b$, ce qui conclurait : il suffit donc d'établir l'égalité $M \overset{?}{=} \frac{bM}{ab}a + \frac{aM}{ab}b$. Pour ce faire, en se plaçant dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}\right)$ de la droite (AB), on constate que le point $\frac{bM}{ab}a + \frac{aM}{ab}b$ a pour coordonnée $\frac{bM}{1}0 + \frac{aM}{1}1 = aM$, à savoir celle du point M, *c. q. f. d.*.

   Soit $\lambda \in [0,1]$. Le point $M := \lambda a + (1-\lambda) b = b + \lambda (a-b) = b + \lambda \overrightarrow{ba}$ appartient à la droite passant par b et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{ba}$, ce qui est dire $M \in (AB)$. Pour conclure, il suffit de montrer que les distances aM et bM sont plus petites que ab : on a d'une part

$$\begin{aligned} bM &= \left\|\overrightarrow{bM}\right\| = \|M-b\| = \|\lambda a - \lambda b\| = \|\lambda (a-b)\| = \underbrace{|\lambda|}_{\leq 1} \left\|\overrightarrow{ba}\right\| \leq ab, \text{ d'autre part} \\ aM &= \|M-a\| = \|(\lambda - 1) a + (1-\lambda) b\| = \|(1-\lambda)(b-a)\| = \underbrace{|1-\lambda|}_{\leq 1} \left\|\overrightarrow{ab}\right\| \leq ab. \end{aligned}$$

Description des fonctions convexes.

1. Supposons f convexe et soient $a, b \in I$ et $\lambda, \mu \geq 0$ tels que $\lambda + \mu = 1$. Alors le point $\lambda\binom{a}{f(a)} + \mu\binom{b}{f(b)}$ est (d'après le préliminaire 2) un point du segment reliant deux points de l'épigraphe de f, donc reste dans l'épigraphe de f par hypothèse de convexité, ce qui est dire que son ordonnée est supérieure ou égale à l'image de son abscisse, ce qui s'écrit $f(\lambda a + \mu b) \leq \lambda f(a) + \mu f(b)$.

   Supposons réciproquement la comparaison de l'énoncé. Soient $\binom{a}{\alpha}$ et $\binom{b}{\beta}$ deux points de l'épigraphe de f (c'est dire $\alpha \geq f(a)$ et $\beta \geq f(b)$) et M un point du segment les reliant. D'après le préliminaire 2), M est de la forme $\lambda\binom{a}{\alpha} + (1-\lambda)\binom{b}{\beta}$ pour un certain $\lambda \in [0,1]$. En posant $\mu := 1 - \lambda$, on bien $\mu \geq 0$ (car $\lambda \leq 1$) et $\lambda + \mu = 1$, donc la comparaison de l'hypothèse s'applique : $f(\lambda a + \mu b) \leq \lambda f(a) + \mu f(b)$. Puisque $\begin{cases} \lambda \geq 0 \\ \alpha \geq f(a) \end{cases}$ et $\begin{cases} \mu \geq 0 \\ \beta \geq f(b) \end{cases}$, le membre de droite est majoré par $\lambda\alpha + \mu\beta$, ce qui s'écrit "l'ordonnée de M est plus grande que l'image par f de son abscisse", *i. e.* "M appartient à l'épigraphe de f".
2. Supposons f convexe. Soient $a \in I$ et $b \leq c$ dans I différents de a. Supposons par exemple que $a < b \leq c$. Dans l'égalité $b = \frac{c-b}{c-a}a + \frac{b-a}{c-a}c$ (immédiate à vérifier), les poids $\frac{c-b}{c-a}$ et $\frac{b-a}{c-a}$ sont alors positifs et de somme 1, donc l'hypothèse s'applique (avec la question 1) : $f(b) \leq \frac{c-b}{c-a}f(a) + \frac{b-a}{c-a}f(c)$, ce qui se réécrit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$, *i. e.* $\tau_a(b) \leq \tau_a(c)$. Les deux autres cas $b < a < c$ et $b \leq c < a$ se traitent de manière analogue.

   Supposons réciproquement la croissance de l'énoncé. Soient $a, b \in I$ et $\lambda, \mu \geq 0$ tels que $\lambda + \mu = 1$; posons $c := \lambda a + \mu b$. Si c vaut a ou b, alors $\binom{\lambda}{\mu}$ vaut $\binom{0}{1}$ ou $\binom{1}{0}$ et l'égalité à montrer est triviale. Sinon, vu que a et b jouent un rôle symétrique, on peut toujours supposer $a \leq b$, d'où par hypothèse $\tau_c(a) \leq \tau_c(b)$, ce qui équivaut (remonter les calculs déjà faits) à $f(c) \leq \frac{b-c}{b-a}f(a) + \frac{c-a}{b-a}f(b) = \lambda f(a) + \mu f(b)$, d'où (d'après la question 1) la convexité de f .
3. Supposons f convexe et soient $a < b < c$ dans I. D'une part, la croissance de τ_a (*cf.* question 2) permet d'écrire $\tau_a(b) \leq \tau_a(c)$, d'autre part, celle de τ_c nous donne $\tau_c(a) \leq \tau_c(b)$, *i. e.* $\tau_a(c) \leq \tau_b(c)$.

   Supposons réciproquement les comparaisons de l'énoncé. Soient $a \in I$ et $b < c$ dans $I \setminus \{a\}$: l'hypothèse s'applique et nous donne la comparaison $\tau_a(b) \leq \tau_a(c)$. La question 2 montre alors que f est convexe.

4. Supposons f convexe. Soient $a < b$ dans I. D'une part, pour $t \in]a,b]$, la question 3 nous donne $\tau_a(t) \leq \tau_a(b)$, d'où $f'(a) \leq \tau_a(b)$ lorsque $t \longrightarrow a$; d'autre part pour $t \in [a,b[$, la question 3 nous donne $\tau_a(b) \leq \tau_t(b) = \tau_b(t)$, d'où $\tau_a(b) \leq f'(b)$ lorsque $t \longrightarrow b$. Il en résulte $f'(a) \leq f'(b)$, *c. q. f. d.*.

   Supposons f' croissante. Soit $a < b$ dans I et $\lambda, \mu \geq 0$ tels que $\lambda + \mu = 1$. Posons $c := \lambda a + \mu b$. Par le premier préliminaire, la pente $\tau_a(c)$ vaut $f'(\alpha)$ pour un certain $\alpha < c$ et la pente $\tau_b(c)$ vaut $f'(\beta)$ pour un certain $\beta > c$. La croissance de f' permet alors d'affirmer $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\alpha) \leq f'(\beta) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$, d'où (remonter les calculs déjà faits) la comparaison $f(c) \leq \frac{b-c}{b-a} f(a) + \frac{c-a}{b-a} f(b) = \lambda f(a) + \mu f(b)$ et la convexité de f (*cf.* question 1).

5. D'après la question 4, f est convexe si et seulement si f' croît, *i. e.* ssi la dérivée de f' est positive, ce qui conclut.

6. Supposons que I soit un segment $[a,b]$ et que f convexe. Fixons un point $t \in I$ et notons $M := \max\{f(a), f(b)\}$. Alors $f(t)$ est en-dessous de la corde $\binom{a}{f(a)}\binom{b}{f(b)}$, donc est inférieur ou égal à l'ordonnée de tout point $\lambda\binom{a}{f(a)} + \mu\binom{b}{f(b)}$ de cette corde, en particulier pour λ et μ choisis tels que $t = \lambda a + \mu b$ (possible d'après le préliminaire 1), ce qui s'écrit $f(t) \leq \lambda f(a) + \mu f(b) \overset{\lambda,\mu \geq 0}{\leq} \lambda M + \mu M \overset{\lambda+\mu=1}{=} M$, *c. q. f. d.*.

   Supposons f convexe. Soient $a < b$ dans I et λ un réel. Alors la fonction $f + \lambda \operatorname{Id}$ est convexe (elle satisfait la comparaison de la question 1), donc (par ce qui précède) atteint sa plus grande valeur en a ou b, laquelle vaut $f + \lambda \operatorname{Id}$ appliquée en a ou en b, *c. q. f. d.*.

   Supposons réciproquement f comme dans l'énoncé. Soient $a \leq t \leq b$ dans I. La fonction $f - \tau_a(b) \operatorname{Id}$ est par hypothèse maximale en a ou b, donc (lui rajouter une constante) également la fonction $(f - f(a)) - \tau_a(b)(\operatorname{Id} - a)$; or cette dernière est nulle en a et en b, donc sa valeur en t est négative, ce qui se réécrit $\tau_a(t) \leq \tau_a(b)$. On montrerait de même que la fonction $(f - f(b)) - \tau_a(b)(\operatorname{Id} - b)$ est négative, ce qui se réécrirait $\tau_b(a) \leq \tau_b(t)$. La question 3 montre alors que f est convexe.

Concavité.

1. Soit f une fonction convexe et concave sur un intervalle I. Montrons que f est affine sur tout segment de I. Soient $a, b \in I$ et $t \in [a,b]$: on peut écrire $t = \lambda a + (1-\lambda) b$ pour un $\lambda \in [0,1]$, ce qui revient à $\lambda = \frac{t-b}{a-b}$. L'égalité $f(\lambda a + (1-\lambda) b) = \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$ (donnée par l'hypothèse) se réécrit alors $f(t) = \frac{t-b}{a-b} f(a) + \frac{a-t}{a-b} f(b)$; il y a donc deux réels λ et μ tels que $f(t) = \lambda t + \mu$ pour tout $t \in [a,b]$, *c. q. f. d.*.

   Montrons à présent que f est affine sur tout I. Fixons un segment infini $[a,b]$ de I : sur ce segment, on sait que $f_{|[a,b]} = \lambda \operatorname{Id} + \mu$ pour certains réels λ, μ. Soit $t \in I$: puisque I est un intervalle, le segment $S := [\min\{a,t\}, \max\{b,t\}]$ est inclus dans I, donc il y a des réels Λ et M tels que $f_{|S} = \Lambda \operatorname{Id} + M$. Puisque les fonctions $\lambda \operatorname{Id} + \mu$ et $\Lambda \operatorname{Id} + M$ coïncident sur $[a,b]$, qui est infini, on doit avoir $\binom{\Lambda}{M} = \binom{\lambda}{\mu}$. Il en résulte $f(t) = f_{|S}(t) = [\lambda \operatorname{Id} + \mu](t)$; ceci tenant pour tout $t \in I$, on a montré que $f = \lambda \operatorname{Id} + \mu$.

2. Soit $a, b \geq 0$. Par monotonie des pentes des cordes (*cf.* question 3), la corde $\binom{a}{f(a)}\binom{b}{f(b)}$ est au-dessus de la corde $\binom{0}{f(0)}\binom{b}{f(b)}$ qui est au-dessus de la corde $\binom{0}{f(0)}\binom{a+b}{f(a+b)}$, d'où la comparaison des ordonnées des milieux $\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \frac{f(a+b)+f(0)}{2}$, *c. q. f. d.*.

   On pensera par exemple aux fonctions $\sqrt{\cdot}$, $\sqrt[3]{\cdot}$, atn ou $\ln(1 + \operatorname{Id})$.

Propriétés.

1. Soit f et g convexes sur I. Soient $a, b \in I$ et $\lambda, \mu \geq 0$ tels que $\lambda + \mu = 1$. Alors

$$[f+g](\lambda a + \mu b) = f(\lambda a + \mu b) + g(\lambda a + \mu b) \leq \lambda f(a) + \mu f(b) + \lambda g(a) + \mu g(b) = \lambda [f+g](a) + \mu [f+g](b).$$

   En supposant g convexe et croissante sur l'image de f, on a

$$\begin{aligned} [g \circ f](\lambda a + \mu b) &= g(f(\lambda a + \mu b)) \underset{f \text{ convexe}}{\overset{g \text{ croît}}{\leq}} g(\lambda f(a) + \mu f(b)) \\ &\overset{g \text{ convexe}}{\leq} \lambda g(f(a)) + \mu g(f(b)) = \lambda [g \circ f](a) + \mu [g \circ f](b). \end{aligned}$$

2. Soit $f > 0$ telle que $\ln \circ f$ soit convexe. Puisque $\exp = \ln^{-1}$ est convexe et croissante, la question précédente montre que $f = \exp \circ (\ln \circ f)$ est convexe.

3. Soit α un réel. La fonction $\operatorname{Id}^{\alpha}_{|\mathbf{R}_+^*}$ est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ de dérivée seconde $\alpha(\alpha-1)\operatorname{Id}^{\alpha-2}$ qui est du signe de $\alpha(\alpha-1)$, d'où le résultat annoncé (*cf.* question 5).

4. On a $\exp'' = \exp > 0$, donc exp est convexe. On a $\ln'' = \frac{-1}{\mathrm{Id}^{\times 2}} < 0$ donc ln est concave. Sur $[0, \pi]$, on a $\sin'' = -\sin \leq 0$, donc sin est concave sur $[0, \pi]$. Sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos'' = -\cos \leq 0$, donc cos est concave sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\tan'' = 2\tan\left(1 + \tan^2\right)$ qui du signe de Id, donc tan est convexe sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et concave sur $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

On a $[\ln(1+\exp)]'' = \left[\frac{\exp}{1+\exp}\right]' = \left[1 - \frac{1}{1+\exp}\right]' = \frac{\exp}{(1+\exp)^2} > 0$, donc $\ln(1+\exp)$ est convexe.

On a $\left[\frac{\mathrm{Id}}{1+\mathrm{Id}}\right]'' = \left[1 - \frac{1}{1+\mathrm{Id}}\right]'' = \frac{-2}{(1+\mathrm{Id})^{\times 3}}$ qui est du signe opposé à $(1+\mathrm{Id})$, donc $\frac{\mathrm{Id}}{1+\mathrm{Id}}$ est convexe sur $]-\infty, -1[$ et concave sur $]-1, \infty[$.

5. Soit f convexe sur un intervalle I et soit a intérieur à I. On aura $\tau_a(t) \leq \tau_a(b)$ dès que $t < a < b$ dans I, de sorte que la fonction τ_a restriente à gauche de a est majorée ; or elle est croissante d'après la question 2, donc admet un limite en a, d'où la dérivabilité à gauche (même argument à droite).

La fonction nulle sur $]0, 1[$ qui vaut 42 en 0 et en 1 est convexe sur $[0, 1]$ mais pas dérivable en 0 ni en 1.

6. Soit f convexe sur un intervalle I et soit $a \in I$. On note $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$ les dérivées respectivement à droite et à gauche de f en a. Soit $t < a$ dans I : la question précédente montre que $\tau_a(t) \leq f'_g(a)$, d'où $f(t) \geq f(a) + f'_g(a)(t-a) \underset{t-a<0}{\overset{f'_g(a) \leq f'_d(a)}{\geq}} f(a) + f'_d(a)(t-a)$; même argument lorsque $t > a$ dans I. Dans tous les cas, on a montré que f est au-dessus de ses deux demi-tangentes en a, *c. q. f. d.*.

7. Considérons une droite passant le point $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$: si l'on trace un droite horizontale passant par ce même point, alors l'aire entre les deux droites est nulle (le triangle d'un côté est compensé par le triangle de l'autre). Il en résulte que les aires sous les deux droites sont les mêmes, ce qui montre que l'aire sous la première droite ne dépend pas de sa pente : en choisissant cette dernière égale à une dérivée de f en a, cette droite sera (par la question précédente) toute entière en-dessous du graphe de f, d'où par intégration la première comparaison.

Le même raisonnement pour une droite mobile autour du point $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$ montre que l'aire sous cette droite vaut celle sous la corde $\binom{a}{f(a)}\binom{b}{f(b)}$ (choisir pour pente celle de la corde), d'où par intégration la seconde comparaison.

8. Soit f convexe croissant strictement sur un segment I. Alors, pour tous points $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$ dans $\mathrm{Im}\, f$ et pour tous $\lambda, \mu \geq 0$ de somme 1, on aura

$$f^{-1}(\lambda\alpha + \mu\beta) = f^{-1}(\lambda f(a) + \mu f(b)) \underset{f \text{ convexe}}{\overset{f^{-1} \text{ croît}}{\geq}} f^{-1}(f(\lambda a + \mu b)) = \lambda a + \mu b = \lambda f^{-1}(\alpha) + \mu f^{-1}(\beta),$$

ce qui montre que f^{-1} est concave (penser à la fonction convexe $\mathrm{Id}^{\times 2}$ et à sa réciproque concave $\sqrt{\cdot}$). On complèterait par le même raisonnement le tableau suivant :

	f croît	f décroît
f convexe	f^{-1} concave	f^{-1} convexe
f concave	f^{-1} convexe	f^{-1} concave

.

9. En remarquant que $\lambda a + (1-\lambda)\frac{\mu b + \nu c}{\mu + \nu} = \lambda a + \mu b + \nu c$, on peut écrire

$$\begin{aligned} f(\lambda a + \mu b + \nu c) &= f\left(\lambda a + (1-\lambda)\frac{\mu b + \nu c}{\mu + \nu}\right) \overset{f \text{ convexe}}{\leq} \lambda f(a) + (1-\lambda) f\left(\frac{\mu}{\mu+\nu} b + \frac{\nu}{\mu+\nu} c\right) \\ &\underset{1-\lambda \geq 0}{\overset{f \text{ convexe}}{\leq}} \lambda f(a) + (1-\lambda)\left(\frac{\mu}{\mu+\nu} f(b) + \frac{\nu}{\mu+\nu} f(b)\right) \\ &= \lambda f(a) + \mu f(b) + \nu f(c). \end{aligned}$$

10. On raisonne par récurrence sur n (ce qui précède pave la voie). Fixons f et I. Notons pour tout $n \geq 1$ entier $P(n)$ la comparaison à montrer quantifiée universellement sur les a_i et sur les λ_i.

Lorsque $n = 1$, on a forcément $\lambda_1 = 1$ et la comparaison souhaitée est une égalité, ce qui montre $P(1)$.

Supposons à présent $P(n)$ pour un entier $n \geq 1$. Soient $a_0, a_1, ..., a_n \in I$ et $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$ tels que

$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$. On alors

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i\right) &= f\left(\lambda_0 a_0 + (1-\lambda_0) \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}\right) \overset{f \text{ convexe}}{\leq} \lambda_0 f(a_0) + (1-\lambda_0) f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} a_i\right) \\ &\underset{\text{de récurrence}}{\overset{\text{hypothèse}}{\leq}} \lambda_0 f(a_0) + (1-\lambda_0) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{(1-\lambda_0)} f(a_i) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(a_i),\ c.\ q.\ f.\ d.. \end{aligned}$$

Deux exemple fondamentaux.
Afin d'alléger l'écriture, on oubliera les indices de sommation (toujours de $i = 1$ à n) et des produits.

1. En notant a la valeur commune aux a_i, on a

$$\begin{aligned} \text{d'une part pour tout } t \text{ non nul} \quad &: \quad \sqrt[t]{\sum \lambda_i a_i^t} = \sqrt[t]{\sum \lambda_i a^t} = \sqrt[t]{a^t \underbrace{\sum \lambda_i}_{=1}} = \sqrt[t]{a^t} = a, \\ \text{d'autre part} \quad &: \quad \prod a_i^{\lambda_i} = \prod a^{\lambda_i} = a^{\sum \lambda_i} = a^1 = a. \end{aligned}$$

On en déduit que la fontion M est constamment égale à a.

2. Soient $0 < \alpha < \beta$. On a les équivalences

$$\begin{aligned} M(\alpha) \overset{?}{<} M(\beta) &\iff \sqrt[\alpha]{\sum \lambda_i a_i^\alpha} \overset{?}{<} \sqrt[\beta]{\sum \lambda_i a_i^\beta} \\ \iff \left(\sum \lambda_i a_i^\alpha\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} \overset{?}{<} \sum \lambda_i a_i^\beta &\iff \left(\sum \lambda_i \left(a_i^\alpha\right)\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} \overset{?}{<} \sum \lambda_i \left(a_i^\alpha\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} \end{aligned}$$

ce qui découle de la stricte convexité de $a \mapsto a^{\frac{\beta}{\alpha}}$ (en effet, $\frac{\beta}{\alpha} > 1$).

Pour $\alpha < \beta < 0$, on veut

$$\begin{aligned} M(\alpha) \overset{?}{<} M(\beta) &\iff \sqrt[\alpha]{\sum \lambda_i a_i^\alpha} \overset{?}{<} \sqrt[\beta]{\sum \lambda_i a_i^\beta} \\ &\iff \sqrt[-\beta]{\sum \lambda_i \left(\frac{1}{a_i}\right)^{-\beta}} \overset{?}{<} \sqrt[-\alpha]{\sum \lambda_i \left(\frac{1}{a_i}\right)^{-\alpha}} \\ &\iff M(-\beta) \overset{?}{<} M(-\alpha) \text{ où l'on a remplacé les } a_i \text{ par leurs inverses,} \\ &\quad\ \text{comparaison qui est vraie d'après ce qui précède car } 0 < -\beta < -\alpha. \end{aligned}$$

Il reste à comparer $M(0)$ et $M(t)$. Pour $t > 0$, on veut

$$\prod a_i^{\lambda_i} \overset{?}{<} \sqrt[t]{\sum \lambda_i a_i^t} \iff \sum \lambda_i \ln a_i \overset{?}{<} \frac{1}{t} \ln\left(\sum \lambda_i a_i^t\right) \iff \sum \lambda_i \ln\left(a_i^t\right) \overset{?}{<} \ln\left(\sum \lambda_i a_i^t\right),$$

ce qui résulte de la stricte concavité du logarithme. Pour $t < 0$, on veut

$$\sqrt[t]{\sum \lambda_i a_i^t} \overset{?}{<} \prod a_i^{\lambda_i} \iff \prod \left(\frac{1}{a_i}\right)^{\lambda_i} \overset{?}{<} \sqrt[-t]{\sum \lambda_i \left(\frac{1}{a_i}\right)^{-t}} \iff M(0) \overset{?}{<} M(-t) \text{ où l'on a}$$

remplacé les a_i par leurs inverses, comparaison qui est vraie d'après ce qui précède car $0 < -t$.

3. Les trois comparaisons du milieu s'écrivent $M(-1) \leq M(0) \leq M(1) \leq M(2)$ où les poids sont pris égaux à $\frac{1}{2}$.

En notant $M := \max\{a, b\}$, il vient $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \sqrt{\frac{M^2+M^2}{2}} = \sqrt{M^2} \overset{M \geq 0}{=} M$, d'où la comparaison tout à droite.

En notant $m := \min\{a, b\}$, il vient $\frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \geq \frac{2}{\frac{1}{m}+\frac{1}{m}} = m$, d'où la comparaison tout à gauche.

4. La comparaison est inchangée si l'on multiplie tous les a_i par un même réel strictement positif : en choisissant pour ce dernier $\frac{1}{\sum a_i}$ (si cela n'est pas possible, alors tous les a_i sont nuls et la comparaison souhaitée s'écrit $0 \overset{?}{=} 0$), on se ramène au cas où $\sum a_i = 1$. Le même argument permet de supposer $\sum b_i = 1$

et $\sum c_i = 1$. On invoque alors pour tout i la comparaison $M(0) \leq M(1)$ pour les trois réels $a_i, b_i, c_i \geq 0$ ce qui permet d'écrire par sommation

$$\begin{aligned}\sum \underbrace{a_i^\lambda b_i^\mu c_i^\nu}_{=M(0)} &\leq \sum \underbrace{\lambda a_i + \mu b_i + \nu c_i}_{=M(1)} = \lambda \underbrace{\sum a_i}_{=1} + \mu \underbrace{\sum b_i}_{=1} + \nu \underbrace{\sum c_i}_{=1} \\ &= \lambda + \mu + \nu = 1 = \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^\lambda \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^\mu \left(\sum_{i=1}^n c_i\right)^\nu, \text{ c. q. f. d..}\end{aligned}$$

5. On raisonne comme ci-dessus : à j fixé, quite à multiplier les $a_{i,j}$ par un même scalaire positif, on peut supposer $\sum_i a_{i,j} = 1$. On invoque alors encore $M(0) \leq M(1)$ pour écrire

$$\sum_i \underbrace{\prod_j a_{i,j}^{\lambda_j}}_{=M(0)} \leq \sum_i \underbrace{\sum_j \lambda_j a_{i,j}}_{=M(1)} = \sum_j \lambda_j \underbrace{\sum_i a_{i,j}}_{=1} = \sum_j \lambda_j = 1 = \prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j}\right)^{\lambda_j}, \text{ c. q. f. d..}$$

6. Appliquer $M(1) \geq M(0)$ avec $n = 2$, $\binom{\lambda_1}{\lambda_2} = \binom{1/p}{1/q}$ et $\binom{a_1}{a_2} = \binom{a^p}{b^q}$ donne $\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \geq (a^p)^{\frac{1}{p}} (b^q)^{\frac{1}{q}}$, d'où la première comparaison.

Appliquer la question 4 avec $(\lambda, \mu, \nu) = (1/p, 1/q, 0)$ en remplaçant $\binom{a_i}{b_i}$ par $\binom{a_i^p}{b_i^q}$ donne $\sum_{i=1}^n (a_i^p)^{\frac{1}{p}} (b_i^q)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$, d'où la deuxième comparaison. Spécialiser $p = q = 2$ donne alors la troisième comparaison.

Applications de la convexité.

1. On écrit $\prod (2 + a_i) = \prod (1 + 1 + a_i) \overset{M(0) \geq M(1)}{\geq} \prod \sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot a_i} = \sqrt[3]{\prod a_i} = \sqrt[3]{1} = 1$. On a égalité ssi on a l'égalité $M(0) = M(1)$, *i. e.* ssi on a $\forall i, 1 = 1 = a_i$, autrement dit ssi tous les a_i valent 1.
2. On a $\left[\frac{1}{\sin}\right]' = \frac{-\cos}{\sin^2} = \frac{-\cos}{1-\cos^2} = \frac{1}{\cos - \frac{1}{\cos}}$ où le dénominateur est négatif et décroît strictement sur $[0, \pi]$, donc l'inverse croît strictement sur $[0, \pi]$, ce qui montre la stricte convexité de $\frac{1}{\sin}$. On peut donc appliquer Jensen :

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sin\beta} \geq \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right)} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi-\gamma}{2}\right)} = \frac{1}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

En abrégeant $c := \cos\frac{\gamma}{2}$, la conclusion découlerait de la comparaison $2\frac{1}{c} \overset{?}{\geq} \frac{8}{3+2(2c^2-1)}$, ce qui équivaut à $1 + 4c^2 \overset{?}{\geq} 4c$ ou encore à $(2c-1)^2 \overset{?}{\geq} 0$, ce qui est trivial.

On a égalité ssi on a égalité dans Jensen (*i. e.* ssi $\alpha = \beta$) et si on a $2c = 1$ (*i. e.* $\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}$, ou encore $\frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{3}$), c'est-à-dire ssi ABC est isocèle en C avec $\widehat{C} = 120°$.
3. Une comparaison $M(1) \geq M(0)$ donne $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\varepsilon_i a_i \geq \prod_{i=1}^n \varepsilon_i a_i = \left(\prod_{i=1}^n \varepsilon_i\right)\left(\prod_{i=1}^n a_i\right) = \prod_{i=1}^n a_i$ et on sait que l'égalité est atteinte (lorsque tous les $a_i\varepsilon_i$ sont égaux), d'où la valeur minimal recherchée.
4. Le membre de gauche peut être vu, à b et c fixé, comme une somme de fonctions convexes de a, donc comme une fonction convexe de a : sa valeur lorsque a varie est par conséquent maximale aux bornes de l'intervalle où a varie. Le même argument répété aux deux autres lettres montre alors que le membre de gauche est maximale lorsque (a, b, c) est l'un des huit sommets du cube $\{0, 1\}^3$: or, dans chacun de ces huit cas, la valeur est plus petite que 1 et atteint 1 au point $(0, 0, 0)$.
5. La fonction $\frac{1}{1+\mathrm{Id}}$ est convexe, donc on peut appliquer Jensen :

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{a_i + a_{i+1}} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{1 + \frac{a_{i+1}}{a_i}} \geq \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n a_i \frac{a_{i+1}}{a_i}} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n a_{i+1}} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n a_i} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

On a égalité ssi tous les $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ sont égaux : si c'est le cas, en notant q la valeur commune de ce quotient, on doit avoir $q^n = \prod \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_2 a_3 \cdots a_n a_1}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n} = 1$, d'où $q = 1$ et tous les a_i sont égaux (ce qui implique réciproquement l'égalité des $\frac{a_{i+1}}{a_i}$).

6. Divisant par $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$, la comparaison voulue est équivalente à (poser $c_i := \frac{b_i}{a_i}$) $1 + \sqrt[n]{c_1 \cdots c_n} \leq \sqrt[n]{(1+c_1)\cdots(1+c_n)}$, ou encore (en appliquant ln) à $\ln\left(1+\sqrt[n]{c_1\cdots c_n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(1+c_i)$. Or la fonction $\ln(1+\exp)$ est convexe (montré plus haut), donc on peut appliquer Jensen aux réels $\ln c_i$:

$$\ln\left(1+\sqrt[n]{c_1\cdots c_n}\right) = \ln\left(1+e^{\sum \frac{1}{n}\ln c_i}\right) \leq \sum \frac{1}{n}\ln\left(1+e^{\ln c_i}\right) = \sum \frac{1}{n}\ln(1+c_i)\,,\ c.\ q.\ f.\ d..$$

On a égalité ssi tous les $\ln c_i$ sont égaux, *i. e.* ssi $a_i = b_i$ pour tout i.

7. Écrivons $(a,b,c) = \left(e^{-\alpha}, e^{-\beta}, e^{-\gamma}\right)$ pour des réels $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$. La comparaison désirée se réécrit alors

$$\left(e^\alpha - e^{-\alpha}\right) + \left(e^\beta - e^{-\beta}\right) + \left(e^\gamma - e^{-\gamma}\right) \leq e^{\alpha+\beta+\gamma} - e^{-(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Or la fonction $\exp - \exp(-\operatorname{Id})$ est convexe sur $\mathbf{R}_+$ (sa dérivée seconde $\exp - \exp(-\operatorname{Id})$ est positive sur $\mathbf{R}_+$ car on y a $\exp \geq 1 \geq \exp(-\operatorname{Id})$) et envoie 0 sur 0, donc est sur-additive (*cf.* question 2 sur la concavivté), d'où la conclusion.

8. La comparaison de gauche a été prouvée à la question 7 des propriétés. Un calcul montre que la comparaison de droite est inchangée lorsque l'on remplace f successivement par $f+\mu$ (où $\mu \in \mathbf{R}$), λf (où $\lambda > 0$) ou $f + \nu \operatorname{Id}$ (où $\nu > 0$). Cela signifie que l'on peut imposer successivement $f(0) = 0$ (en prenant $\mu := -f(0)$), $f'(0) = 0$ (en prenant $\nu := -f'(0)$) puis $f(1) = 1$ (en prenant[1] $\lambda := \frac{1}{f(1)}$). Alors le réel $\frac{f(0)+f(1)}{2} - \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2} - \int_0^1 f(x)\,dx$ vaut l'aire comprise entre le graphe de f et la première bissectrice, laquelle est majorée par l'aire du triangle formés par les points $A := \binom{0}{0}$, $B := \binom{1}{1}$ et le point C de rencontre de la tangente en $\binom{1}{1}$ avec l'axe des abscisse. Pour trouver C, notons $\alpha := f'(1)$ l'unique paramètre restant : il vient alors

$$y_B - y_C = \alpha(x_B - x_C) \implies 1 = \alpha(1 - x_c) \implies x_C = 1 - \frac{1}{\alpha}.$$

Noter bien que $\alpha \geq 1$ car la pente de la tangente en B doit dépasser celle de la corde AB. On veut donc

$$\mathcal{A}(ABC) \overset{?}{\leq} \frac{f'(1)-f'(0)}{8} \iff \frac{1}{2}x_C \overset{?}{\leq} \frac{\alpha}{8} \iff 1 - \frac{1}{\alpha} \overset{?}{\leq} \frac{\alpha}{4} \iff \alpha^2 - 4\alpha + 4 \overset{?}{\geq} 0 \iff (\alpha-2)^2 \overset{?}{\geq} 0,$$

ce qui est clair (on a même le cas d'égalité $\alpha = 2$).

9. La fonction $\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{Id}}}$ est convexe sur $]0,1[$ (sa dérivée $\frac{1/2}{\sqrt{1-\operatorname{Id}}^3}$ y croît), donc on peut appliquer Jensen :

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \frac{1}{\sqrt{1-\sum_{i=1}^n x_i \times x_i}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sum x_i^2}}$$

avec égalité ssi tous les x_i sont égaux (par *stricte* concavité).

On a obtenu (à peu de choses près) une moyenne d'ordre 2, que l'on veut minorer par une moyenne d'ordre $\frac{1}{2}$ (le terme $\sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{x_i}{n-1}}$). Ce ne devrait pas être trop difficile vu la comparaison $M(2) \geq M\left(\frac{1}{2}\right)$.

Pour le faire habilement, on peut essayer d'intercaler entre nos deux moyennes d'ordres $2 > \frac{1}{2}$ la moyenne d'ordre 1, qui est triviale à calculer vue la condition $\sum x_i = 1$.

Partons du terme de droite, et appliquons $M\left(\frac{1}{2}\right) \leq M(1)$:

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{x_i}{n-1}} = n\sqrt{\frac{1}{n-1}}\frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{n} \leq n\sqrt{\frac{1}{n-1}}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Partons à présent du terme de gauche (déjà minoré) et utilisons $M(2) \geq M(1)$ (qui s'appelle aussi Cauchy-Schwarz quand tous les coefficients sont égaux) :

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sum x_i^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1-n\left(\sum \frac{x_i}{n}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$ La boule est bouclée.

Pour le cas d'égalité, on a utilisé une fois Jensen et $M\left(\frac{1}{2}\right) \leq M(1) \leq M(2)$. On a donc égalité au départ ssi on a égalité dans ces trois comparaisons, *i. e.* ssi tous les x_i sont égaux.

[1] Il faut par soucis de rigueur regarder le cas où $\frac{1}{f(1)}$ n'est pas défini.

On sait que f est par convexité au-dessus de sa tangente au point $\binom{0}{f(0)}$, laquelle coïncide avec l'axe des abscisses (on a supposé $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$), et que f est (toujours par convexité) en dessous de sa corde reliant les points $\binom{0}{f(0)}$ et $\binom{1}{f(1)}$.

Si on pouvait pas considérer $\frac{1}{f(1)}$, autrement dit si $f(1)$ était nul, la corde précédente coïnciderait avec l'axe des abscisse, de sorte que le graphe de f devrait lui aussi coïncider avec cet axe : mais alors f serait nulle et la comparaison triviale à montrer.