Devoir maison 2

(à rendre pour le mercredi 17 octobre)

Le but de ce problème est d'étudier une famille de fonctions faciles à repérer et qui permettent de prouver élégamment de nombreuses comparaisons.

On utilisera les abréviations $\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ et $\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 a_2 \cdots a_n$ (*Sigma* comme *Somme* et *Pi* comme *Produit*) pour toute suite finie de réels $a_1, a_2, ..., a_n$.

Préliminaire.

On admet le résultat suivant : si une fonction dérivable sur un segment prend la même valeur aux extrémités de ce segment, alors sa dérivée s'annule à l'intérieur de ce segment.

1. *Soit f une fonction dérivable sur un segment $[a, b]$. Montrer que la pente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est l'image par f' d'un point de $]a, b[$.*
2. *Soient a et b deux points du plan. Montrer qu'un point M appartient au segment $[ab]$ si et seulement si il y a un réel $\lambda \in [0, 1]$ tel que $M = \lambda a + (1 - \lambda) b$.*

Description des fonctions convexes.

Une partie P du plan est dit ***convexe*** si elle est stable par passage au segment, *i. e.* si et seulement si $\forall a, b \in P,\ [ab] \subset P$.

L'***épigraphe*** d'une fonction f à valeurs réelles est l'ensemble des points $\binom{x}{y}$ tels que $y \geq f(x)$ où x parcourt l'ensemble de définition de f.

Une fonction à valeurs réelles est dite ***convexe*** lorsque son épigraphe est convexe.

On fixe un intervalle infini I de $\mathbf{R}$ et on considère une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$.

1. *Montrer que f est convexe si et seulement si $\forall a, b \in I,\ \forall \lambda, \mu \geq 0,\ \lambda + \mu = 1 \Longrightarrow f(\lambda a + \mu b) \leq \lambda f(a) + \mu f(b)$.*
2. *Montrer que f est convexe si et seulement si, pour tout $a \in I$, la fonction $\tau_a : \left\{ \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \frac{f(t)-f(a)}{t-a} \end{array} \right.$ est croissante.*
3. *Montrer que f est convexe si et seulement si, pour tous points $a < b < c$ de I, on a $\tau_a(b) \leq \tau_a(c) \leq \tau_b(c)$.*
4. *On suppose f dérivable sur I. Montrer que f est convexe si et seulement si f' croît.*
5. *On suppose f deux fois dérivable. Montrer que f est convexe si et seulement si f'' est positive.*
6. *Montrer que la plus grande valeur d'une fonction convexe sur un segment est l'image d'une des bornes de ce segment. En déduire que f est convexe si et seulement si, pour tous points $a < b$ dans I, pour tout réel λ, la plus grande valeur de $f + \lambda \operatorname{Id}$ est $f(a) + \lambda a$ ou $f(b) + \lambda b$.*

Concavité.

Une fonction à valeurs réelles est dite ***concave*** si son opposée est convexe. On admet que les résultats précédents tiennent en remplaçant "convexe" par "concave" à condition de renverser les sens (inégalités, variations, extrema).

1. *Décrire les fonctions qui sont à la fois convexes et concaves.*
2. *Montrer qu'une fonction concave sur $\mathbf{R}^+$ envoyant 0 sur 0 est sous-additive*[1]*. Donner des exemples de telles fonctions.*

Propriétés.

1. *Montrer que la composée et la somme de fonctions convexes reste convexe.*
2. *Montrer qu'une fonction à valeurs strictement positives est convexe si son logarithme l'est. Réciproque ?*
3. *Soit α un réel. Montrer que $\operatorname{Id}^{\alpha}_{|\mathbf{R}_+}$ est convexe si et seulement si $\alpha \geq 1$ ou si $\alpha \leq 0$, concave si et seulement si $0 \leq \alpha \leq 1$. Dessiner quelques exemples.*

[1] Une fonction f est dite ***sous-additive*** si, pour tous éléments source a et b, on a $f(a + b) \leq f(a) + f(b)$.

4. *Étudier la convexité des fonctions* exp, ln, $\sin_{|[0,\pi]}$, $\cos_{|\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$, $\tan_{|\mathbf{R}_+}$, $\frac{\mathrm{Id}}{1+\mathrm{Id}}$, $t \mapsto \frac{e^{t^{18}}+1}{1+2e^{t^{18}}}$, $\ln(1+\exp)$.
5. *Montrer qu'une fonction convexe est dérivable à droite et à gauche en tout point. Donner un exemple de fonction convexe non partout dérivable.*
6. *Montrer que le graphe d'une fonction convexe est au-dessus de toutes ses demi-tangentes.*
7. *Étant donnée une fonction f convexe sur un segment $[a,b]$, montrer la comparaison*

$$(b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq (b-a)\, \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

8. *Que dire de la réciproque d'une fonction convexe (resp. concave) strictement monotone ?*
9. *Soit f une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. On donne trois points a,b,c dans I et trois réels positifs λ,μ,ν de somme 1. Montrer que*

$$f(\lambda a+\mu b+\nu c) \leq \lambda f(a)+\mu f(b)+\nu f(c).$$

10. *Soient $n \geq 1$ un entier et $a_1,...,a_n$ des points d'un intervalle I de $\mathbf{R}$. Pour toute fonction convexe $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ et pour tous réels positifs $\lambda_1,...,\lambda_n$ de somme 1, montrer la comparaison (dite de **Jensen**)*

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i).$$

Une fonction est dite ***strictement convexe*** si son graphe est strictement en-dessous de ses cordes (à l'exception des extremités) de la corde. On se convaincra qu'une fonction dérivable est strictement convexe si et seulement si sa dérivée croît strictement. L'intérêt de cette notion est le suivant (admis) :

si on a égalité dans l'égalité de Jensen pour une fonction strictement convexe avec des λ_i strictement positifs, alors tous les a_i sont nécessairement égaux.

Deux exemple fondamentaux.

On fixe un entier $n \geq 1$, des réels $a_1,...,a_n > 0$ et d'autres réels $\lambda_1,...,\lambda_n > 0$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. On définit une fonction $M : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t \neq 0 & \longmapsto & \sqrt[t]{\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^t} \\ 0 & \longmapsto & \prod_{i=1}^n a_i^{\lambda_i} \end{array}\right.$.

1. *Déterminer M lorsque $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.*
2. *On suppose que les réels $a_1,...,a_n$ ne sont pas tous égaux. Montrer que M croît strictement sur $\mathbf{R}_+^*$ et sur $\mathbf{R}_-^*$. Montrer que $\forall t>0,\ M(-t) < M(0) < M(t)$.*
3. *On considère deux réels a et b positifs. Montrer les comparaisons*

$$\min\{a,b\} \leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \max\{a,b\}.$$

4. *Soient $n \geq 1$ un entier et $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n,c_1,c_2,...,c_n$ des réels positifs. Si λ,μ,ν désignent trois réels positifs de somme 1, montrer alors la comparaison*

$$\sum_{i=1}^n a_i^\lambda b_i^\mu c_i^\nu \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^\lambda \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^\mu \left(\sum_{i=1}^n c_i\right)^\nu.$$

5. *Considérons un entier $n \geq 1$, une application $\left\{\begin{array}{ccc} \{1,...,n\}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ (i,j) & \longmapsto & a_{i,j} \end{array}\right.$ et des réels positifs $\lambda_1,...,\lambda_n$ de somme 1. Montrer la comparaison (dite d'**Hölder**)*

$$\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^n a_{i,j}^{\lambda_j} \leq \prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j}\right)^{\lambda_j}.$$

6. *Établir les comparaisons suivantes pour tous réels $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$:*

$$\begin{aligned}
\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} &\geq ab \qquad \text{lorsque } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ avec } a, b, p, q > 0, \\
\sum a_i b_i &\leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} a_i^p} \sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n} b_i^q} \quad \begin{array}{c}\text{où } p \text{ et } q \text{ sont deux entiers} \\ \text{tels que } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\end{array} \\
\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 &\leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \qquad (\textbf{\textit{Buniakowski-Cauchy-Schwarz}})
\end{aligned}$$

Applications de la convexité.

1. *Soit $n \geq 1$ un entier et $a_1, ..., a_n$ des réels positifs de produit $a_1 \cdots a_n = 1$. Montrer que*

$$\prod (2 + a_i) \geq 3^n \qquad \text{et déterminer le cas d'égalité.}$$

2. *Soit ABC un triangle non aplati. On note α, β, γ les mesures de ses angles dans $]0, \pi[$. Montrer que*

$$\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \geq \frac{8}{3 + 2 \cos \gamma} \qquad \text{et décrire le cas d'égalité.}$$

3. *Soit $n \geq 1$ un entier et $a_1, ..., a_n > 0$ des réels. Déterminer la plus petite valeur de $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i$ où les réels $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ parcourent $\mathbf{R}_+^n$ tout en gardant un produit constamment égale à 1.*
4. *Soient a, b, c des réels dans $[0, 1]$. Montrer que $\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-a)(1-c) \leq 1$.*
5. *Soit $n \geq 1$ un entier et $a_1, ..., a_n > 0$ des réels de somme $\sum a_i = 1$. Montrer que*[2]

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_i + a_{i+1}} \geq \frac{1}{2} \qquad \text{et préciser le cas d'égalité.}$$

6. *Soit $n > 1$ un entier et $a_1, ..., a_n$ et $b_1, ..., b_n$ des réels > 0. Comparer*

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} + \sqrt[n]{b_1 \cdots b_n} \text{ et } \sqrt[n]{(a_1 + b_1) \cdots (a_n + b_n)} \qquad \text{et décrire le cas d'égalité.}$$

7. *Montrer pour tout point (a, b, c) du cube $]0, 1]^3$ la comparaison*

$$a + b + c + \frac{1}{abc} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + abc.$$

8. *Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ convexe dérivable. Montrer la comparaison*

$$0 \leq \frac{f(0) + f(1)}{2} - \int_0^1 f(x)\, dx \leq \frac{f'(1) - f'(0)}{8}.$$

9. *Soit $n \geq 2$ un entier et $x_1, ..., x_n > 0$ des réels de somme $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Montrer que*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1 - x_i}} \geq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{x_i}{n-1}} \text{ et donner les cas d'égalité.}$$

[2] avec la convention évidente $a_{n+1} = a_1$

INDICATIONS.

Préliminaires.

1. appliquer le résultat donné à une fonction qui mesure l'écart entre le graphe de f et la corde reliant les points $\binom{a}{f(a)}$ et $\binom{b}{f(b)}$
2. barycentres

Description des fonctions convexes.

1. préliminaire 2
2. $b = \frac{c-b}{c-a}a + \frac{b-a}{c-a}c$
3. $b = \frac{c-b}{c-a}a + \frac{b-a}{c-a}c$
4. préliminaire 1
5. dérivée & croissance
6. tracer une corde la plus large possible ; la distance du graphe à la corde est de la forme $f + \lambda \operatorname{Id}$

Concavité

1. plat
2. comparer les pentes des cordes reliant les points d'abscisses a et b avec 0 et b puis avec 0 et $a+b$

Propriétés.

1. retour à la définition
2. exponentielle
3. utiliser ce qui précède
4. utiliser ce qui précède
5. une fonction croissante majorée admet une limite
6. équation de la tangente ?
7. faire tourner une droite passant le point du graphe d'abscisse $\frac{a+b}{2}$
8. retour à la définition
9. $\lambda a + (1-\lambda)\frac{\mu b + \nu c}{\mu + \nu}$
10. récurrence

Deux exemple fondamentaux.

1. ouvrir les yeux
2. raisonner par équivalences et invoquer Jensen
3. cas particulier
4. se ramener par homogénéité au cas où $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n c_i = 1$ et utiliser $M(0) \leq M(1)$
5. idem
6. cas particuliers

Applications.

1. $2 = 1 + 1$
2. Jensen
3. $M(0)$
4. voir le membre de gauche comme une fonction d'argument a ou b ou c
5. $\frac{1}{1+\operatorname{Id}}$
6. homogénéité, $\ln(1+\exp)$
7. $]0,1]$ est l'image de $\exp(-\operatorname{Id})$, concavité
8. remplacer f successivement par λf, $f+\mu$, $f+\nu \operatorname{Id}$, supposer $f(0)=0$, $f(1)=1$ et $f'(0)=0$
9. Jensen, $M\left(\frac{1}{2}\right) \leq M(1) \leq M(2)$