Devoir maison 1

Le but de ce problème est de calculer $\cos\frac{\pi}{17}$.
(Cette question est liée à la construction à la règle et au compas du polygone régulier à dix-sept côtés.)

On abrégera dans tout le problème le radical de 17 par

$$\mathfrak{r} := \sqrt{17}.$$

Préliminaires.

1. *On considérer deux réels a et b ainsi qu'un entier $n \geq 0$. Simplifier les sommes*

$$\sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \sin(a+3b) + \cdots + \sin(a+nb) \quad \textit{et}$$
$$\cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \cos(a+3b) + \cdots + \cos(a+nb).$$

2. *Montrer l'égalité*

$$8\sqrt{34+2\mathfrak{r}} + (1-\mathfrak{r})\sqrt{34-2\mathfrak{r}} = \sqrt{680+152\mathfrak{r}}.$$

   (On pourra montrer dans un premier temps que cette égalité équivaut à $8\sqrt{\mathfrak{r}+1} - \sqrt{\mathfrak{r}-1}^3 = 2\sqrt{5\mathfrak{r}+19}$.)

Problème.
On définit les quantités suivantes

$$k' := \cos\frac{k\pi}{17} \text{ pour tout entier } k \text{ relatif,}$$
$$\alpha := 3' + 5', \quad \beta := 7' + 11', \quad \gamma := 1' + 13', \quad \delta := 9' + 15',$$
$$\sigma := \alpha + \beta, \quad \tau := \gamma + \delta, \quad \chi := \sigma + \tau.$$

1. *Simplifier $(-k)'$ et $(17-k)'$ pour tout entier relatif k.*
2. *Étant donnés deux entiers k et l dans $\mathbb{Z}$, linéariser $2k'l'$.*
3. *Établir les comparaisons $\alpha \geq 0 \geq \beta$ et $\gamma \geq 0 \geq \delta$.*
4. *Calculer χ.*
5. *Calculer le produit $\sigma\tau$.*
6. *En déduire des valeurs simples pour σ et τ.*
7. *Calculer de même $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$.*
8. *En déduire des valeurs les plus simples possibles pour α, β, γ et δ.*
9. *Exprimer $13'$ en fonction de $1'$ et conclure* :

$$16\cos\frac{\pi}{17} = 1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2\sqrt{680 + 152\sqrt{17}}}.$$

Indications.

Prélimineaires.

1. Revenir à l'exponentielle, considérer une suite géométrique, penser à l'arc moitié. L'une des sommes vaut $\frac{\sin\frac{n+1}{2}b}{\sin\frac{b}{2}}\cos\left(a + n\frac{b}{2}\right)$.
2. Simplifier l'égalité demandée en factorisant, regarder les carrés de chacun des membres, travailler à part $\sqrt{\mathfrak{r}+1}\sqrt{\mathfrak{r}-1}^3$.

Problème.

1. Regarder le cercle trigo.
2. Comparer les signes et les valeurs absolues des quatre termes.
3. Tout ramener à $1', 2', ..., 8'$.
4. Expliciter et utiliser le préliminaire 1. On doit trouver $\frac{1}{2}$.
5. Développer et linéariser grâce à 2. On doit trouver -2χ.
6. Trouver un polynôme dont σ et τ sont racines.
7. *cf.* 5.
8. *cf.* 6.
9. *cf.* 5. Se ramener à prouver $(8\gamma)^2 + 16(8\alpha) \stackrel{?}{=} 68 + 12\mathfrak{r} + 2\sqrt{680+152\mathfrak{r}}$ et utiliser le préliminaire 2.