Pour faire connaissance avec votre mathématique

Éléments de réponse.

1. (a) En tant qu'êtres vivants, nous *agissons* : lorsque nous répétons une action, il en ressort le concept de ***nombre*** par itération d'une action.

   La *première* action fait émerger le nombre 1 (le *premier* nombre), le fait de *passer à* l'action qui *succède* fait émerger l'*opération* qui à un nombre associe son ***successeur*** (le nombre d'après). Tout nombre peut donc s'obtenir en itérant depuis 1 l'application successeur.

   On définit grâce au successeur d'autres opérations sur les nombres :

   i. l'***addition*** par un entier donné en *itérant* l'opération successeur autant de fois que ce nombre ;

   ii. la ***multiplication*** de deux nombres donnés en *itérant* l'addition par le premier autant de fois que le second ;

   iii. l'***exponentiation*** par un nombre donné en *itérant* la multiplication autant de fois que ce nombre.

   Les quantités que l'on peut former à l'aide de la somme et de l'addition appliquées sur des nombres donnés sont appelés ***polynômes*** en ces nombres.

   Petit à petit s'est exprimé le besoin d'élargir l'ensemble $\mathbf{N}$ des nombres entiers pour considérer des solutions d'équations polynomiales :

équation	solution	dans le nouvel ensemble
$n+1=0$	-1	$\mathbf{Z}$
$2m-1=0$	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{Q}$
$r^2-2=0$	$\sqrt{2}$	$\mathbf{R}$
$i^2+1=0$	$\sqrt{-1}$	$\mathbf{C}$

   En un certain sens, il ne sert à rien de chercher d'autres nombres que les complexes pour pouvoir résoudre une équation polynomiale. (Mais on peut pour d'autres raisons.)

   (b) Fractionner, c'est diviser en petits bouts, en fractions. Qu'obtient-on en fractionnant l'unité ? Des demis, des tiers, des quarts, ..., des n-ièmes.

   Une ***fraction*** est le ***quotient*** de deux nombres. La valeur de ce quotient est un ***rapport***[1] ou un ***taux***. Par exemple une mesure en musique $\frac{4}{4}=\frac{2}{2}=\frac{1}{1}$ ou $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$, une note $\frac{16}{20}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$, un pourcentage $36\%=\frac{36}{100}=\frac{9}{25}$, un taux de variation $\frac{\Delta b}{\Delta a}=\frac{b'-b}{a'-a}$.

   L'ensemble des fractions usuelles est noté $\mathbb{Q}$ pour rappeler qu'il s'agit de *quotients* de nombres entiers. On parle également de nombres rationnels[2] (du lation *ratio* = rapport).

   Par extension, une fraction désigne le quotient ou le rapport de deux trucs.

   (c) Une ***racine*** est *ce qu'il y a à la base*. Historiquement, trouver un rationnel r tel que $r^2=2$ revient à chercher *ce qu'il y a à la base* de l'exposant 2 : quand on y parvient, on dit que l'on a *extrait* la racine carrée de 2. On la note avec un radical $\sqrt{}$ (ancien r).

   Plus généralement, une ***racine*** désignera tout nombre qui annule un polynôme donné par exemple, les nombres $\sqrt{2}$, $^3\sqrt{3}+1$ et $e^{\frac{2\pi i}{17}}$ sont respectivement (des) racines des polynômes X^2-2, $(X-1)^3$ et $X^{17}-1$.

[1] désigne aussi parfois la *forme* de ce qui est évalué, à savoir le quotient, la fraction

[2] Le mot *rationnel* renvoit également à *raison*, vestige terminologique de l'époque où l'on croyait que tout nombre appréhensible par la raison était un ratio de nombres entiers – époque révolue depuis la découverte de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

2. (a) Intuitivement, un ***point*** désigne un lieu atomique (indivisible) de l'espace. C'est un indéfinissable de la géométrie. En théorie des ensembles, un point est la donnée de ses coordonnées (point de vue adopté dans le cours sur les complexes).

   (b) Le ***segment*** reliant deux points donnés est le *plus court chemin* les reliant ou encore la *ligne droite tracée entre* ces points. C'est un lieu géométrique (ensemble de points).

   (c) Intuitivement, une ***droite*** est la prolongation indéfinie d'un segment dans ses deux sens. C'est un indéfinissable de la géométrie. En théorie des ensembles, *la* droite désigne la droite réelle $\mathbb{R}$.

   (d) L'***angle*** entre deux demi-droites données est la rotation qui amène la première sur la second. Un angle est donc un *déplacement*. On identifie deux angles s'ils ont même mesure *modulo* 2π (ce qui revient à oublier les centres des rotations correspondantes).

3. Les concepts de longueur, aire et volume sont tous des cas particuliers de ce qu'on appelle une ***mesure***, c'est-à-dire une fonction μ définie sur certaines parties (dites ***mesurables***) telle que[3] $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ pour toutes parties mesurables *disjointes* A et B.

   Sur la droite, il existe une *unique* mesure μ telle que $\mu([0,a]) = a$ pour tout réel $a > 0$ qui soit invariante par translation[4] : on l'appelle la ***mesure de Lebesgue*** sur $\mathbb{R}$. Pour les segments, la mesure de Lebesgue coïncide avec la longueur.

   On a un résultat analogue dans le plan en remplaçant l'égalité $\mu([0,a]) = a$ par $\mu([0,l] \times [0,L]) = lL$. La mesure de Lebesgue d'un rectangle coïncide avec son aire.

   De même dans l'espace, la mesure de Lebesgue d'un pavé $[0,l] \times [0,L] \times [0,h]$ est son volume lLh.

4. (a) Une ***fonction*** est une correspondance entre deux ensembles telle qu'à tout élément a du premier corresponde au plus un élément du second. L'*acte* qui associe à un tel premier élément a le second (s'il existe) s'appelle ***appliquer*** la fonction sur a. Les fonctions sont donc intimement reliés à notre *action* sur les objets, elles constituent *le mode d'interaction fondamental* entre les objets mathématiques.

   (b) La ***dérivée*** en un point a d'une fonction f qui à un réel associe un autre réel est la limite de la ***pente***[5] $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ lorque x tend vers a. La ***dérivée*** d'une telle fonction f est la fonction qui à un réel a associe la dérivée de f en a.

   (c) De façon informelle, une ***intégrale*** désigne toute *somme infinitésimale*. Précisons cela.

   Pour calculer une longueur / une aire / un volume, disons plus généralement la *mesure* m d'un domaine, on peut commencer par découper le domaine en plein de petits sous-domaines dont on sait évaluer facilement la mesure δm de chacun. Imaginer par exemple un disque (dont on cherche l'aire) quadrillé par des carrés : l'aire du disque est approchée par la sommes des aires des carrés (il a y une erreur due aux carrés qui rencontrent le bord du disque). Ce découpage permet d'approcher la mesure totale, *intégrale*, du domaine par une somme finie de mesures *partielles* (celle des δm), notée alors avec un symbole $\sum$ (abréviation de *Somme*). Généralement, meilleure est l'approximation[6] $\sum \delta m$, plus les sous-domaines sont nombreux et de mesures δm petites (repenser au disque quadrillé). À la limite, la mesure δm de chaque sous-domaine s'évanouit tandis que leur nombre devient infini : leur somme $\sum \delta m$ peut cependant tendre vers quelque chose et ce quelque chose a toute chance d'être la mesure intégrale recherchée. Dans ce cas, la somme limite est notée avec un signe $\int$ (ancien s, toujours pour *Somme*), d'où la mesure *intégrale* recherchée $m = \int \delta m$.

   On retiendra donc qu'une ***intégrale***[7] est une somme infinitésimale $\int \delta m$, à savoir la limite de toute somme $\sum \delta m$ de termes dont le nombre croît indéfiniment et dont les valeurs correspondantes δm s'évanouissent.

---

[3] Cette propriété de transformer l'union disjointe en somme est en fait valable pour toute suite *infinie* de parties mesurables deux à deux disjointes.

[4] comprendre que la translatée d'une partie a même mesure que cette partie

[5] aussi appelée ***taux d'accroissement*** ou ***taux de variation***

[6] Ces sommes sont historiquement attribuées à Eudoxe (-IV^e siècle) et Archimède (-III^e siècle).

[7] Dans le cas particulier de l'aire délimitée par le graphe d'une fonction f, l'axe des abscisses et deux droites verticales d'abscisses a et b, on découpe l'intervalle $[a,b]$ en un grand nombre N d'intervalles $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b$ et on approche l'aire considérée par les rectangles de base $dx_i := x_i - x_{i-1}$ (d comme *différence*) et de hauteur $f(x_i)$, ce qui donne une somme finie $\sum f(x_i)\,dx_i$ (où i parcourt les entiers de 1 à N). Lorsque les différences dx_i deviennent toutes infiniment petites, la limite (si elle existe) de cette somme est notée $\int f(x)\,dx$ (ou $\int_a^b f(x)\,dx$ ou $\int_a^b f$) et est appelée ***intégrale*** de f (entre a et b).

5. (a) ***Définir***, c'est mettre une étiquette (le *défini* – ce qui *est* défini) sur une collection d'autres étiquettes (le *définissant* – *ce qui* définit). Une ***définition*** est donc un *raccourci de langage*, une *convention commode* pour alléger le discours. Cela permet de savoir exactement de quoi l'on parle à tout instant.

En apparence seulement car, si l'on remonte les définitions, la finitude humaine nous fera tomber sur des étiquettes ne renvoyant à *aucune* autre, étiquettes dont les "définis" sont pour cette raison appelés ***indéfinissable***[8]. Ainsi, si l'on croit savoir précisément de quoi l'on parle, ce sera toujours *relativement à des indéfinissables.*

Il conviendra donc en mathématique de lâcher toute prétention à un quelconque absolu (ce qui n'en exclut pas une croyance).

(b) Un ***théorème***[9] est un énoncé *prouvé* à partir d'autres théorèmes (toute comme une définition est une collection de définitions antérieures). En remontant les preuves, on arrive (comme pour les définitions) à des théorèmes ***improuvables,*** appelés ***axiomes*** (qui énoncent souvent des propriétés des indéfinissables[10]).

La vérité des axiomes ne peut (par définition) être établie par une preuve – et l'on se demandera alors par quoi d'autre. Les axiomes peuvent cependant – et doivent – être *motivés*, éclairés, mis en chair par d'autres considérations, souvent récoltées *a posteriori*[11].

(c) Une ***preuve*** est une suite d'énoncés dont chacun est *déduit* des précédents. Un ***théorème*** est un énoncé situé à la fin d'une preuve[12].

L'intérêt des preuves est le ***principe de cohérence*** du discours mathématique :

ce qui est prouvable à partir de vrai est indiscutablement vrai.

Ce principe constitue en fait *le seul* mode d'établissement de vérités mathématiques : on part de choses vraies et on prouve.

Ce qui précède montre que la vérité mathématique est *illusoire* : non seulement, à défaut d'être absolue, elle est relative à celle des axiomes mais, de surcroît, cette dernière est un non-sens puisque la vérité ne peut s'établir qu'à partir de *preuves* – lesquelles ne sauraient atteindre les axiomes, improuvables.

Il conviendra donc en mathématique d'oublier le vrai-faux pour se concentrer sur le *prouvable.*

On retiendra des questions (a), (b) et (c) les propos suivants de Bertrand RUSSELL (1917) :

« *Mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true.* ».

(d) Une ***implication*** est une proposition de la forme $p \Longrightarrow q$ où le symbole $\Longrightarrow$ est justement dit "*d'implication*". Il s'agit donc d'un type particulier de propositions construites à l'aide de *symboles de connexion*, tout comme les conjonctions $p \wedge q$, les disjonctions $p \vee q$, les négations $\neg p$, les incompatibilités $p|q$...

Toutefois, contrairement à ces dernières, une implication $p \Longrightarrow q$ dénote à l'origine une *croyance* : celle que p implique q.

(e) Une ***déduction*** est un *acte* : celui de *déduire.* La déduction est légitimée selon des *règles* (dite *de déduction*) dont la plus courante est le ***modus ponens***[13] : de p et de $p \Longrightarrow q$ on peut déduire q.

Une déduction (un *acte*) ne saurait être confondue avec une implication (un *objet* du discours logique).

[8] Par exemple, les indéfinissables de la géométrie plane sont les points, les droites, la relation d'incidence $\in$ et la relation d'orthogonalité $\perp$. On peut définir le parallélisme de deux droites en disant qu'elles sont toutes deux orthogonales à une même troisième droite.

[9] La première syllabe ne vient pas de *theos* « dieu » mais de *thea* « spectacle ». Comme le mot « théorie », le mot « théorème » a été construit à partir du verbe grec *theorein* signifiant « observer ». Un théorème est donc ce *qui est digne d'être observé.*

[10] Par exemple, en géométrie plan, le fameux cinquième postulat s'énonce : *par un point donné il passe exactement une droite parallèle à une droite donnée.*

[11] Citons K. GÖDEL en 1947 dans *What is Cantor's Continuum Problem ?* : « *There might exist axioms so abundant in their verifiable consequences, shedding so much light upon a whole discipline, and furnishing such powerful methods for solving given problems (and even solving them, as far as possible, in a constructivistic way) that quite irrespective of their intrinsic necessity they would have to be assumed at least in the same sense as any established physical theory.* »

[12] Il convient de vérifier que cette définition de "théorème" est plus large que celle proposée plus haut : étant donné un théorème θ prouvé à partir d'autres théorèmes θ_i, on obtient une preuve du théorème θ.en juxtaposant des preuves des théorèmes θ_i.

[13] on parle aussi de ***coupure*** ou de ***détachement***, pour dire qu'on laisse tomber dans l'implication $p \Longrightarrow q$ la prémisse p et le symbole $\Longrightarrow$ pour n'en garder que la conclusion q