Rédaction mathématique

Lorsque l'on écrit en mathématique, on AGIT. Pas seulement en déposant de l'encre ou du graphite sur du papier (ou de la craie sur le tableau) : on observe, on intuite et on PROUVE. Dans cette démarche, trois ACTES se distinguent : *DÉFINIR*, *INVOQUER* et *AFFIRMER*.

II Ce dont tu parles, tu l'auras défini au préalable – toi ou autrui.

Définition II. On peut DÉFINIR, DONNER SENS À un nouveau concept ou un un nouveau symbole.
★ Une définition n'est qu'un RACCOURCI de langage, une ABRÉVIATION commode[1].
Les verbes consacrés, à conjuguer avec *nous*, *on* (voire *je*) sont

définir, *poser*, *noter*, *appeler*(, *abréger*, *introduire*).

1. Trois définitions qui disent la même chose : "On appellera [trcucmuche] un [schblurb] qui vérifie [graou]" "On dit qu'un [schblurb] est un [trucmuche] si [graou] est vérifié" "Dès lors que [graou] est vérifié, [schblurb] sera qualifié de [trucmuche]".
2. Quatre définitions équivalentes : "Posons $r := \sqrt{18}$" "Notons $r := \sqrt{18}$" "On appellera r la racine carré de 18" "Le symbole r dénotera l'unique réel positif dont le carré vaut 18".

Invocation II. On peut INVOQUER un objet vérifiant une propriété donnée – la plupart du temps une appartenance :

Soit a tel que... *(souvent "Soit $a \in A$.")*

★ On doit alors JUSTIFIER L'INVOCATION par un énoncé EXISTENTIEL :

si on a "$\exists a,\ P(a)$", alors on peut invoquer "Soit a tel que $P(a)$";
si A est non vide, alors on peut invoquer "Soit $a \in A$".

★ On peut également invoquer un objet pour MONTRER UN ÉNONCÉ UNIVERSEL (et, dans ce cas, pas besoin de justifier l'invocation[2]) :

Pour montrer "$\forall a \in A,\ P(a)$", on invoque "Soit $a \in A$" (sans justifier) et on montre "$P(a)$".

★ Un objet invoqué doit être considéré FIXÉ au même titre que tout objet défini ($1, 18, -42, \cos, \int_0^1 \sqrt{x}dx$...). Cependant, au contraire de la définition, CE N'EST PAS NOUS QUI FIXONS l'objet invoqué[3] : en conséquence,

1. ne pas utiliser *soit* pour définir (ni d'ailleurs pour signifier *ou bien* ou *c'est-à-dire*) ;
2. éviter les verbes *choisir*, *prendre*, *considérer*, *fixer* ou *se donner*[4].

Ainsi, quand le deuxième commandement énonce DÉFINI, il signifie en fait DÉFINI OU INVOQUÉ :

II' Ce dont tu parles, tu lui auras donné sens, toi ou autrui.

[1] « *Il faut voir les définitions [...] comme des conventions superflues d'abréviations notationnelles. [...] La forme dans laquelle on exprime une définition est sans importance, tant qu'elle indique la manière de l'éliminer.* » W. V. Quine, *From a logical point of view*, 1980

[2] en effet, si on n'a pas "$\exists a \in A$", alors A est vide et la quantification universelle "$\forall a \in \emptyset,\ P(a)$" est tautologiquement vraie

[3] Une invocation "*Soit a tel que...*" pourrait se paraphraser en : "*Demandons à une tierce personne de choisir, de façon arbitraire (de préférence pour notre plus grand mal), un objet tel que... Ayant fait son choix, autrui nous donnera un tel objet, que nous pourrons nommer comme il nous plaira (par exemple* a*) et que nous pourrons considérer fixé pour toute la suite du discours (autrui ne reviendra pas sur son choix).*"

[4] L'usage consacre en effet l'impératif de ces verbes (avec le pronom *nous*) au lieu de l'impératif quasi-divin du verbe *être*, ce qui a l'inconvénient de nous faire croire que NOUS choisissons l'objet invoqué.

III Ce que tu affirmes, tu l'auras prouvé – sinon tu le tairas.

Affirmation III. On peut AFFIRMER un énoncé. Deux types d'énoncés se distinguent :

1. *relations entre termes* : égalité, comparaison, appartenance, inclusion, tendance, divisibilité, majoration, minoration, équivalence (de suites ou de fonctions), domination, négligeabilité...
2. *connections logique entre propositions* : équivalence, conjonction, négation, disjonction, implication, quantification universelle/existentielle...

★ Toute affirmation doit être CLAIREMENT ANNONCÉE, *e. g.* par l'une des expressions suivantes :

On a... *On dispose de...*

★ Toute affirmation doit être JUSTIFIÉE (ou bien triviale).
Par exemple, si on a un énoncé universel "$\forall x,\ P(x)$", on peut *remplacer* le symbole *muet* (ici x) par n'importe quel symbole *faisant sens* (sens donné par une définition ou une invocation).

Pour affirmer "$P(a)$", il suffit d'avoir "$\forall x,\ P(x)$" *(mais on n'est pas obligé).*

★ On peut également SUPPOSER un énoncé (sans justification) pour montrer une IMPLICATION :

Pour montrer une implication "$H \Longrightarrow \Theta$",

on suppose l'hypothèse "H" (sans justifier) et on montre la thèse "Θ".

Agir en mathématique ne sert à rien si l'on n'arrive pas à COMMUNIQUER les fruits de notre action. (Cela se propagerait sans doute à d'autre domaines que la mathématique.) D'où le premier commandement :

I Ce que tu dis, ce sera ce que tu penses – et rien d'autre.

Exposition I. Une bonne partie de la prose mathématique, rédigée en langue courante, consiste en l'EXPOSITION D'UNE DÉMARCHE. Plus cette exposition est claire et dépourvue d'ambiguïtés, plus le lecteur s'y retrouvera (autrui comme soi-même). Quelques exemples en vrac :
"On voudrait..." "Or..." "Il en découle..." "ce qui motive la définition suivante." "Si... alors...." "En échangeant les rôles des inconnues, on obtient..." "On va montrer que..." "mais..." "Il suffit d'avoir..." "ce qu'il fallait démontrer." "Il en résulte..." "Nous en déduisons..." "comme annoncé." "Il est raisonnable de poser..." "ce qui est vrai" "Il vient alors..." "L'énoncé nous incite à introduire..." "d'où l'on tire..." "Peut-on espérer établir... ?" "ce qui est impossible" "Il serait commode de disposer du lemme..." "ce qui conclut."...

★ ne jamais abréger la langue courante par des symboles logiques ($\forall$, $\Longrightarrow$...) ou de relation ($\in$, $>$...)[5] :

1. le monde mathématique a ses règles et sa grammaire dont l'extrême rigueur frise la rigidité ;
2. le monde de la langue courante n'a rien à voir et est beaucoup plus souple, vivant.

Exemple. *Montrer que tout entier naturel est strictement plus petit que 2 puissance cet entier.*
On veut montrer l'énoncé universel $\forall n \in \mathbf{N},\ n < 2^n$ [formulation du problème]. Vu que l'on parle d'*entiers*, il revient au même de montrer $\forall p \in \mathbf{N},\ 2^p \geq p+1$ [affirmation d'une équivalence entre deux comparaisons stricte et large]. Raisonnons par récurrence sur p [prose annonçant le type de raisonnement].

Pour tout entier naturel s, notons C_s la comparaison $2^s > s$ [définition de $C_0, C_1, C_2, ...$].

Montrons C_0 [annonce de plan]. Ce dernier équivaut à [affirmation d'une équivalence] $2^0 > 0$, *i. e.* à [affirmation d'une équivalence] $1 > 0$, ce qui est vrai [affirmation d'une comparaison stricte], d'où [déduction] C_0.

Montrons $\forall p \in \mathbf{N},\ C_p \Longrightarrow C_{p+1}$ [annonce de plan]. Soit $a \in \mathbf{N}$ tel que C_a [invocation non justifiée pour montrer un énoncé universel]. On a [affirmation] alors [suite à l'invocation] la comparaison $2^{a+1} = 2^a 2 \geq (a+1)\,2 = 2a+2$; pour conclure C_{a+1}, il suffirait de [affirmation d'une implication] montrer que le membre tout à droite est plus grand que $(a+1)+1$. Or cette comparaison équivaut à [affirmation d'une équivalence] $2a+2 \geq a+2$, *i. e.* à [affirmation d'une équivalence] $2a \geq a$, ou encore à [affirmation d'une équivalence] $a \geq 0$, ce qui est vrai [affirmation d'une comparaison], d'où la conclusion [prose annonçant la fin de la démonstration].

[5] Il sera toutefois toléré (et compris) d'écrire "*pour tout* $x \in \mathbf{R}$" même si l'on préférera "*pour tout réel* x". De même, on préférera dire "*étant donné un rationnel q strictement positif*" à "*étant donné un rationnel* $q > 0$ " ou à "*étant donné* $q \in \mathbf{Q}_+^*$ ".