Calcul différentiel multiple

(résumé)

droite $\mathbf{R}$	plan $\mathbf{R}^2$
courbe	surface
fonction φ à UN argument réel définie au voisinge d'un point α	(fonction f à un argument PLAN =) fonction f à DEUX arguments réels définie au voisinge d'un point a
dérivée $\varphi'(\alpha)$	gradient $\nabla_a f$
produit $\varphi'(\alpha)\,t$	produit scalaire $\langle \nabla_a f \mid u \rangle$
application linéaire tangente $\varphi'(\alpha)\,\mathrm{Id}$	différentielle $d_a f$
DL_1 de φ en α : $\varphi(\alpha+t)-\varphi(\alpha) \simeq \varphi'(\alpha)\,t$	DL_1 de f en a : $f(a+u)-f(a) \simeq d_a f(u) = \langle \nabla_a f \mid u \rangle$
droite tangente d'équation $y-\varphi(\alpha)=\varphi'(\alpha)(x-\alpha)$	plan tangent d'équation $z-f(a)=d_a f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-a\right)$
φ C^1 : φ' définie et continue, *i. e.* la droite tangente varie continûement	f C^1 : $D_u f$ définie et continue $\forall u$, *i. e.* $D_1 f$ et $D_2 f$ définies et continues, *i. e.* le plan tangent varie continûement

Pour dériver : $\begin{array}{c}\text{UN SEUL argument}\\ t \mapsto f(a+t\overrightarrow{u})\end{array} \iff \begin{array}{c}\text{UNE direction } u \iff\\ \text{UNE droite } a+\mathbf{R}u\end{array} \iff \left[\begin{array}{c}\text{une dérivée PARTIELLE}\\ D_u f(a) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{f(a+tu)-f(a)}{t}\end{array}\right.$.

Dérivées partielles premières et secondes : $\begin{array}{l}[D_1 f](x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\\ [D_2 f](x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\end{array}$. ★★ ★ Gare aux abus $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$!

$\begin{array}{c}\text{dérivable dans DEUX directions LIBRES}\\ \iff \text{dérivables dans TOUTES les directions}\end{array} \implies D_u f = u_1 \cdot D_1 f + u_2 \cdot D_2 f.$

$\begin{array}{c}\text{Gradient}\\ \text{SI } \mathbf{K}=\mathbf{R}\end{array}$: $\nabla_a f = \begin{pmatrix}D_1 f(a)\\ D_2 f(a)\end{pmatrix}$. Donne la direction de PLUS FORTE VARIATION depuis a.

$\frac{\partial}{\partial t} f\binom{\lambda(t)}{\mu(t)} = D_1 f\binom{\lambda(t)}{\mu(t)} \cdot \lambda'(t) + D_2 f\binom{\lambda(t)}{\mu(t)} \cdot \mu'(t).$ $\qquad \begin{pmatrix}\partial_x f\\ \partial_y f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_x X & \partial_x Y\\ \partial_y X & \partial_y Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_X f\\ \partial_Y f\end{pmatrix}$ pour $f\binom{X(x,y)}{Y(x,y)}$.

théorème de ★Schwarz★ : on peut dériver dans n'importe quel ordre : $D_1 D_2 f = D_2 D_1 f$ si $\left[\begin{array}{l}D_1 D_2 f \text{ et } D_2 D_1 f \text{ font sens}\\ \text{ET SONT CONTINUES.}\end{array}\right.$

être C^1 $\implies \left[\begin{array}{c}\text{être différentiable}\\ \iff \text{admet un } DL_1\end{array}\right] \begin{array}{l}\implies \left[\begin{array}{c}\text{être dérivable dans}\\ \text{tous les directions}\end{array}\right.\\ \implies \text{être continue}\end{array}$ ★ ★ ★ ★ Pas d'autres implications !

$\left.\begin{array}{c}f \text{ différentiable}\\ \text{en } a\end{array}\right\} \implies d_a f(u) \begin{array}{l}= D_u f(a) = \langle \nabla_a f \mid u \rangle\\ = u_1 D_1 f(a) + u_2 D_2 f(a)\end{array}$.

$\left.\begin{array}{c}f \text{ réelle différentiable et}\\ \text{localement extrémale en } a\end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{ll}\nabla_a f = 0 & D_1 f(a) = 0 = D_2 f(a)\\ d_a f = 0 & \forall u \in \mathbf{R}^2,\ D_u f(a)\end{array}\right.$ ★ Réciproque fausse !

Sera FERMÉE toute partie définies par des inégalités LARGES utilisant des fonctions CONTINUES.

$\iint_D$ est linéaire, positive, croissante, vérifie Chasles $\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2}$ et les inégalités triangulaires.

★Fubini★ vertical : si $D = \left\{\binom{x}{y} \in \mathbf{R}^2\ ;\ \begin{array}{c}a \leq x \leq \alpha \text{ et}\\ \varphi(x) \leq y \leq \Phi(x)\end{array}\right\}$, alors $\iint_D f = \int_{x=a}^{\alpha}\left(\int_{y=\varphi(x)}^{\Phi(x)} f(x,y)\,dy\right)dx.$

★Fubini★ horizontal : si $D = \left\{\binom{x}{y} \in \mathbf{R}^2\ ;\ \begin{array}{c}b \leq y \leq \beta \text{ et}\\ \psi(y) \leq x \leq \Psi(y)\end{array}\right\}$, alors $\iint_D f = \int_{y=b}^{\beta}\left(\int_{x=\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x,y)\,dx\right)dy.$

centre de gravité : $\frac{\iint_{P\in D}\mu(P)P\ dA}{\iint_{P\in D}\mu(P)\ dA}$; isobarycentre : $\frac{\iint_{P\in D} P\ dA}{\iint_{P\in D} dA}$; moment d'inertie par rapport à un axe Δ : $\frac{\iint_{P\in D}\mu(P)d(P,\Delta)^2\ dA}{\iint_{P\in D}\mu(P)\ dA}$.