Calcul différentiel multiple

lundi 10, mardi 11, mercredi 12 juin

Table des matières

1 "Dériver" et différentier une fonction à *deux* arguments

Dans toute cette section, φ désigne une fonction à valeurs scalaires définie sur un intervalle I infini de $\mathbf{R}$ dont on a fixé un point α : cette fonction servira de point de repère dans le calcul différentiel simple.

Pour le calcul différentiel multiple, on notera A une partie du plan $\mathbf{R}^2$, on appelle f une fonction à valeurs scalaires définie sur A et on fixe un point a dans A.

[dessins] Dériver φ en α revient à tracer la tangente au graphe de φ en le point $(\alpha, \varphi(\alpha))$. Lorsque l'on passe à deux arguments, le "graphe" de f devient une surface et la "tangente" devient alors un plan tangent à la surface en le point $(a, f(a)) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3$ (on est dans l'espace). Mais l'on peut également, en sectionnant la surface par un plan vertical passant par $(a, f(a))$, continuer à considérer des tangentes à des courbes : selon la coupe, on obtiendra différentes "dérivées" de f en a, qui peuvent toutes se retrouver à l'aide du plan tangent.

On retiendra que ce qui généralise l'approximation linéaire est un *plan* tangent et que chaque droite de ce plan est une *partie* tangente définissant une dérivée dite justement *partielle*. Il n'y a pas de dérivée "totale" car dériver suppose donnée une direction : or le plan en contient une infinité.

(Ce qui généralisera la dérivée sera le *gradient* et non la *différentielle*.)

1.1 Continuité

Rappel. f est dite continue en a si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall z \in A,\ |z - a| \leq \delta \Longrightarrow |f(z) - f(a)| \leq \varepsilon,$$

(les barres sont celles du module dans $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$), ce qui revient à ce que

$$\forall (a_n) \in A^{\mathbf{N}},\ a_n \longrightarrow a \Longrightarrow f(a_n) \longrightarrow f(a).$$

Exemples génériques. Les polynômes, exp, cos, sin, tan, ch, sh, th, Re, Im, |Id|.

Exemples singuliers.

1. La fonction $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto a + 2b$ est polynomiale, définie et continue sur tout le plan $\mathbf{R}^2$.
2. La fonction $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^3 + 17xy - y$ est polynomiale, définie et continue sur tout le plan $\mathbf{R}^2$.
3. La fonction $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{u - v + 1}$ est définie (et continue) là où le radical est positif, *i. e.* sur le demi-plan d'équation $y \leq x + 1$.
4. La fonction $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mapsto \ln\left(\alpha^2 + \beta^4 + 1\right)$ est définie (et continue) là où l'argument du ln est strictement positif ; or celui-ci est une somme de carrés non tous nuls, donc est toujours strictement positif. La fonction considérée est donc définie sur tout le plan.
5. La fonction $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mapsto \ln(\lambda + \mu) + \lambda e^{\lambda\mu}$ est définie (et continue) là où l'argument du ln est strictement positif, *i. e.* sur le demi-plan ouvert contenant $(1, 1)$ délimité par la seconde bissectrice (dont une équation est $x + y > 0$).
6. La fonction $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \overset{F}{\mapsto} ab \sin \frac{1}{a^2+b^2}$ est définie (et continue) sur tout le plan $\mathbf{R}^2$ privé de là où le dénominateur s'annule (l'origine). Or on a pour tout complexe $z =: a + ib$ les majorations
$$F(z) = \left| ab \sin \frac{1}{a^2 + b^2} \right| \leq |ab| \leq 2\,|ab| \leq a^2 + b^2 = |z|^2 \overset{z \to 0}{\longrightarrow} 0,$$
ce qui montre que F se prolonge continûment en 0 en posant $F(0) := 0$.
7. La fonction $G : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{2xy}{x^2+y^2}$ est définie (et continue) sur tout le plan $\mathbf{R}^2$ privé de là où le dénominateur s'annule (l'origine). Cependant, si l'on tend vers l'origine suivant une droite, mettons de pente λ, [dessin] alors G tendra vers un réel qui dépendra de λ (en effet, on a pour tout $x \in \mathbf{R}^*$ l'égalité $G\begin{pmatrix} x \\ \lambda x \end{pmatrix} = \frac{2x\lambda x}{x^2+(\lambda x)^2} = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$), ce qui infirme sa continuité en 0.

1.2 Dérivées partielles, caractère C^1

Définition (dérivée partielle selon un vecteur, dérivées partielles première et seconde). Soit u un vecteur dans $\mathbf{R}^2$.

On dit que f est ***dérivable*** *en a* ***dans la direction de*** *u (ou* ***suivant*** *u) si la fonction $t \mapsto f(a + tu)$ est définie dans un voisinage de 0 et est dérivable en 0.* [dessin]

La ***dérivée partielle*** *de f en a* ***suivant*** *u est notée (lorsqu'elle fait sens)*
$$[D_u f](a) = D_u f(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}$$
(mesure le taux de variation de f dans la direction de u à partir de a (penser aux fonctions "altitude" et "température")).

Les dérivées partielles de f en a selon les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^2$ sont respectivement notées
$$[D_1 f](a) = D_1 f(a) \text{ et } [D_2 f](a) = D_2 f(a).$$
La fonction $D_1 f$ (resp. $D_2 f$) est appelée ***première*** *(resp.* ***seconde****)* ***dérivée partielle*** *de f.*

En notant $a =: (x, y)$, on a alors
$$D_1 f(a) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \text{ et } D_2 f(a) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$
Afin de bien saisir ce qui précède et ce qui suit, relire la section 1.3 (*Notations*) du cours de calcul différentiel simple.

★ Comme pour φ, la notation $\frac{\partial f}{\partial x}$ désigne, évaluée en x, la dérivée de f vue comme fonction de x ; or f ne dépend pas de x (contrairement à $f(x, y)$), donc cette dérivée est nulle. On prendra par conséquent gare aux abus notationnels des ingénieurs qui[1] confondent f et $f(x, y)$.

[1] les abus, pas les ingénieurs

★ Ne pas remplacer $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ par $\frac{df(x,y)}{dx}$ car il y a risque de confusion (et de non-sens) avec la différentielle $df(a)$ de f en a (que nous allons voir plus loin). Cette possible confusion est la principale raison pour laquelle nous écrivions déjà systématiquement $\frac{\partial\varphi(a)}{\partial a}$ au lieu de $\frac{d\varphi(a)}{da}$ dans le cours de calcul différentiel simple.

Les dérivées partielles première et seconde $D_1 f$ et $D_2 f$ sont un cas particulier des dérivées partielles $D_u f$. Réciproquement, la proposition suivante nous dit que $D_u f$ peut se retrouver à l'aide de $D_1 f$ et $D_2 f$.

Proposition (expression de la dérivée partielle suivant un vecteur à l'aide des dérivées partielles première et seconde). *Soit $u =: (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2$. Si $D_1 f$ et $D_2 f$ sont définies en un point, alors $D_u f$ aussi et l'on y a*

$$D_u f = u_1 \cdot D_1 f + u_2 \cdot D_2 f.$$

(On pourra retenir : la dérivée suivant une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des dérivées. [dessin])

Exemples. Soit (x, y) un point du plan donnant sens aux expressions suivantes.

1. On a $\frac{\partial}{\partial x}(x+2y) = 1$ et $\frac{\partial}{\partial y}(x+2y) = 2$.
2. On a $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 + 17xy - y\right) = 3x^2 + 17y$ et $\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 + 17xy - y\right) = 17x - 1$.
3. On a $\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x-y+1} = \frac{1}{2\sqrt{x-y+1}}$ et $\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x-y+1} = \frac{-1}{2\sqrt{x-y+1}}$.
4. On a $\frac{\partial}{\partial x}\ln\left(x^2+y^4+1\right) = \frac{2x}{x^2+y^4+1}$ et $\frac{\partial}{\partial y}\ln\left(x^2+y^4+1\right) = \frac{4y^3}{x^2+y^4+1}$.
5. On a $\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(x+y) + xe^{xy}\right) = \frac{1}{x+y} + e^{xy}(1+xy)$ et $\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln(x+y) + xe^{xy}\right) = \frac{1}{x+y} + x^2 e^{xy}$.
6. On a $\frac{\partial}{\partial x}\left(xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right) = y\sin\frac{1}{x^2+y^2} + xy\left(\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right)\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$ et la dérivée seconde $\frac{\partial}{\partial y}\left(xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ s'obtient en permutant x et y (vu la symétrie de ce qui est dérivé)
7. On a $\frac{\partial}{\partial x}\frac{2xy}{x^2+y^2} = 2\frac{y\left(x^2+y^2\right) - xy\left(2x^2\right)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\left(x^2+y^2-2x^3\right)$ et $\frac{\partial}{\partial y}\frac{2xy}{x^2+y^2}$ s'obtient comme précédemment.

Définition (fonctions de classe C^1). *On dit que f est **de classe** C^1 (sur A) si toutes ses dérivées partielles sont définies sur tout A et y sont continues.* (analogue : φ est C^1 sur $I \iff \varphi'$ est définie et continue sur I)

D'après la proposition précédente, cela équivaut à ce que $D_1 f$ et $D_2 f$ soient définies et continues sur A.

Propriété (dérivée et continuité). *Si f est C^1, alors f est C^0.*

★★ Contrairement au cas simple "φ dérivable $\Longrightarrow \varphi$ continue", il se peut que f soit dérivable dans tous les directions mais ne soit pas continue (*cf.* contre-exemple en T. G.). Par conséquent, si l'on ne veut pas perdre la propriété "dérivable $\Longrightarrow$ continue" (et l'on ne veut pas), ce n'est pas une bonne chose de généraliser "φ dérivable en α" par "f dérivable dans toutes les directions". La section suivante introduit la "bonne" généralisation.

Ordre de dérivation. Reprenons la fonction de l'exemple 4 ci-dessus. Soit (x, y) tel que $x > y$. On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(x+y) + xe^{xy}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x+y} + e^{xy}(1+xy)\right) = \frac{-1}{(x+y)^2} + e^{xy}\left(x + x^2y + x\right) \\
\text{et } \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln(x+y) + xe^{xy}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x+y} + x^2 e^{xy}\right) = \frac{-1}{(x+y)^2} + e^{xy}\left(2x + yx^2\right).
\end{aligned}$$

Les résultats coïncident. Ce fait est général : sous une hypothèse C^2, les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ commutent.

Théorème (Schwarz). *Supposons que f est C^1 sur A et que $D_1 D_2 f$ et $D_2 D_1 f$ sont définies au voisinage de a. Si ces dérivées sont continues en a, alors elles y coïncident.*

En posant $a =: (x, y)$, cela se réécrit $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$, ou encore $\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}f(x,y)$ (mais en aucun cas $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$, bien que $0 = 0$).

1.3 Approximation affine : différentielle, plan tangent, gradient

La dérivabilité (pour φ) est le fait de pouvoir s'approcher par une fonction affine, ce qui revient à pouvoir approcher le graphe de f par une droite. [dessin]

Pour f, cette possibilité d'approximation par une fonction affine (à deux arguments) se traduit par celle d'approcher le graphe-surface de f par un plan. [dessin]

Dans les deux cas, on parlera de *différentiabilité* (le terme "dérivabilité" étant réservé aux fonctions à *un seul* argument).

Définition (différentiabilité et DL_1). *On dit que f est* ***différentiable*** *en a s'il existe une application linéaire $L : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$* telle que *pour tout vecteur $u \in \mathbf{R}^2$ suffisamment petit en module on ait l'égalité*

$$f(a+u) = f(a) + L(u) + o_{u \to 0}(|u|) \qquad \textit{(appelée le } DL_1(a) \textit{ de } f\textit{).}$$

Dans ce cas, l'application L est appelée la ***différentielle*** *(ou l'****application linéaire tangente****) de f en a et est notée $d_a f$ ou df_a ou $df(a)$.*

(analogue : φ est dérivable en α ssi on a pour tout réel ε assez petit en module l'égalité $\varphi(\alpha+\varepsilon) = \varphi(\alpha) + L(\varepsilon) + o_{\varepsilon \to 0}(\varepsilon)$ où L est l'homothétie $f'(a)\,\mathrm{Id}$, *i. e.* ssi φ admet un $DL_1(\alpha)$)

Interprétation - définition (plan tangent). L'égalité ci-dessus se réécrit comme une approximation locale $f(a+u) - f(a) \simeq d_a f(u)$, *i. e.* (en posant $(x,y) := a+u$)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - f(a) \simeq d_a f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a\right).$$

Ainsi, si l'on appelle ***plan tangent*** à f en a le plan d'équation

$$z - f(a) = d_a f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a\right),$$

on aura égalité dans le DL_1 ssi $f(x,y)$ coïncide avec la cote z du point du plan tangent situé à la verticale de $(x,y,0)$, autrement dit ssi f "colle" au plan tangent, ou encore ssi f est affine. Ceci éclaire en quoi la différentiabilité revient à de l'approximabilité affine.

(analogue : φ est dérivable en α ssi φ admet un $DL_1(\alpha)$, lequel s'écrit alors $\varphi(x) - \varphi(\alpha) \simeq \varphi'(\alpha)(x-\alpha)$, ou encore ssi le graphe de φ s'approche bien au voisinage de α par une droite ; dans ce cas, la droite tangente en α a pour équation $y - \varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha)(x-\alpha)$)

Proposition (différentiabilité & dérivabilité partielle).

Si f est C^1 au voisinage de a, alors f est différentiable en a. (analogue : si φ est C^1 au voisinage de α, alors φ admet un $DL_1(\alpha)$)

Si f est différentiable en a, alors f est dérivable en a dans toutes les directions. (analogue : si φ admet un $DL_1(\alpha)$, alors φ est dérivable en α)

Dans les deux cas, on a pour tout vecteur $u \in \mathbf{R}^2$ l'égalité

$$d_a f(u) = D_u f(a).$$

Exemple. Posons $F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 7x^3y - 5xy^2$. Il s'agit d'un polynôme, donc F est C^1, *a fortiori* différentiable. Calculons dF en $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On a pour tout $(r,s) \in \mathbf{R}^2$ les égalités

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} f\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} &= 21r^2s - 5s^2 \text{ et } \frac{\partial}{\partial s} f\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = 7r^3 - 10rs, \text{ d'où} \\
D_1 f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= 21 \cdot 1^2 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 42 - 20 = 22 \\
\text{et } D_2 f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= 7 \cdot 1^3 - 10 \cdot 1 \cdot 2 = 7 - 20 = -13,
\end{aligned}$$

ce qui montre que l'application linéaire tangente $d_{(1,2)}F$ envoie un vecteur $(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2$ sur

$$D_{(\alpha,\beta)}f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\alpha\cdot D_1f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\beta\cdot D_2f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=22\alpha-13\beta.$$

Par ailleurs, la valeur de $F(1,2)=7\cdot 1^3\cdot 2-5\cdot 1\cdot 2^2=-6$ et le calcul de $d_{(1,2)}F$ montre que le plan tangent à F en $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ a pour équation

$$22(x-1)-13(y-2)=z-(-6)\,,\ i.\ e.\ 22x=13y+z+2.$$

Remarque : [dessins] f est C^1 au voisinage de a si le plan tangent au point $(a,f(a))$ fait sens et bouge *continûment* lorsqu'on se déplace sur le graphe-surface de f au voisinage de ce point.

(analogue : φ est C^1 au voisinage de α si la tangente au point $(\alpha,\varphi(\alpha))$ fait sens et bouge *continûment* lorsqu'on se déplace sur le graphe de φ au voisinage de ce point)

Définition (gradient si $\mathbf{K}=\mathbf{R}$). *Supposons f différentiable en a et à valeurs réelles. On appelle **gradient** de f en a le vecteur $(D_1f(a),D_2f(a))$; on le note $\operatorname{grad}_a f$ ou $\operatorname{grad} f(a)$ ou $\nabla f(a)$ ou $\nabla_a f$.*

Ainsi, on aura pour tout vecteur $u=:(u_1,u_2)$ du plan les égalités

$$d_af(u)=D_uf(a)=u_1D_1f(a)+u_2D_2f(a)=\langle\nabla_af\mid u\rangle\ \text{(produit scalaire)}$$

(analogue : l'application linéaire tangente à φ en α évaluée en un vecteur $u\in\mathbf{R}$ vaut le produit de scalaires $\varphi'(a)\cdot u$; c'est donc bien le *gradient* qui généralise la dérivée et non la différentielle)

Interprétation. Vu l'approximation

$$f(a+u)-f(a)\simeq d_af(u)=\langle\nabla_af\mid u\rangle\,,$$

la variation de f depuis a sera maximale (à $|u|$ fixé très petit) si u a même direction et même sens que ∇_af. Le gradient en a donne donc la direction vers où f augmente localement le plus vite depuis a.

On pensera à la fonction "moins altitude" en glisse (où le gradient se ressent très clairement il donne la direction de plus forte pente [dessin]) ou à la fonction "température" (dans une eau froide, notre corps trouve instinctivement le gradient en n'importe quel point).

Lorsque le gradient est nul en a, *i. e.* lorsque le plan tangent est horizontal, l'interprétation ci-dessus tombe en défaut, ce qui pourrait laisser supposer que f est extrémale en a. De fait, seule la réciproque est valide.

Théorème ("dérivées" en un point extrémal). *Supposons f à valeurs réelles, différentiable et localement extrémale en a. On a alors chacun des points équivalents suivants :*

1. *le gradient en a est nul : $\nabla_af=0$;*
2. *les dérivées partielles premières et secondes sont nulles : $D_1f(a)=0=D_2f(a)$;*
3. *toutes les dérivées partielles sont nulles : $\forall u\in\mathbf{R}^2,\ D_uf(a)=0$;*
4. *la différentielle en a est nulle : $d_af=0$.*

(analogue : φ extrémale en $a\implies\varphi'(a)=0$)

★ La réciproque est fausse ! Penser à $\binom{x}{y}\mapsto x^3+y^3$ en l'origine.

(analogue : réciproque fausse si $\varphi:x\mapsto x^3$ et $\alpha=0$)

1.4 Composition

Proposition (dérivée d'une composée). *Soient λ et μ deux fonctions dérivables sur I tells que f soit différentiable sur $\left\{\binom{\lambda(t)}{\mu(t)}\ ;\ t\in I\right\}$. Alors, pour tout $t\in I$, la dérivée $\frac{\partial}{\partial t}f\binom{\lambda(t)}{\mu(t)}$ fait sens et vaut*

$$\frac{\partial}{\partial t}f\begin{pmatrix}\lambda(t)\\\mu(t)\end{pmatrix}=D_1f\begin{pmatrix}\lambda(t)\\\mu(t)\end{pmatrix}\cdot\lambda'(t)+D_2f\begin{pmatrix}\lambda(t)\\\mu(t)\end{pmatrix}\cdot\mu'(t)\,.$$

(analogue : $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\lambda(t)) = \varphi'(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t)$)

Exemple. *Soient $p > 0$ et $q > 0$. Dériver la distance à l'origine d'un point décrivant une ellipse paramétrée par $t \mapsto \binom{p\cos t}{q\sin t}$.*

La fonction module (distance à l'origine) $M : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ admet des dérivées partielles $D_1M(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $D_2M(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ en tout point (x,y) non nul. On en déduit (pour tout t réel) les égalités

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}M\begin{pmatrix}p\cos t\\ q\sin t\end{pmatrix} &= D_1M\begin{pmatrix}p\cos t\\ q\sin t\end{pmatrix}\frac{\partial(p\cos t)}{\partial t} + D_2M\begin{pmatrix}p\cos t\\ q\sin t\end{pmatrix}\frac{\partial(q\sin t)}{\partial t}\\ &= \frac{p\cos t}{\sqrt{(p\cos t)^2+(q\sin t)^2}}(-p\sin t) + \frac{q\sin t}{\sqrt{(p\cos t)^2+(q\sin t)^2}}(q\cos t)\\ &= \frac{\left(q^2-p^2\right)\cos t\sin t}{\sqrt{p^2\cos^2 t+q^2\sin^2 t}}.\end{aligned}$$

Corollaire (composition de dérivées partielles). *Soient U une partie de $\mathbf{R}^2$ et X et Y deux fonctions différentiables sur U telles que f soit différentiable sur $\left\{\binom{X(u)}{Y(u)}\ ;\ u \in U\right\}$. Alors, pour tout $(x,y) \in U$, les dérivées partielles de $f\binom{X(x,y)}{Y(x,y)}$ font sens et valent*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}f\begin{pmatrix}X(x,y)\\ Y(x,y)\end{pmatrix} &= D_1f\begin{pmatrix}X(x,y)\\ Y(x,y)\end{pmatrix}\cdot\frac{\partial X(x,y)}{\partial x} + D_2f\begin{pmatrix}X(x,y)\\ Y(x,y)\end{pmatrix}\cdot\frac{\partial Y(x,y)}{\partial x} \text{ et}\\ \frac{\partial}{\partial y}f\begin{pmatrix}X(x,y)\\ Y(x,y)\end{pmatrix} &= D_1f\begin{pmatrix}X(x,y)\\ Y(x,y)\end{pmatrix}\cdot\frac{\partial X(x,y)}{\partial y} + D_2f\begin{pmatrix}X(x,y)\\ Y(x,y)\end{pmatrix}\cdot\frac{\partial Y(x,y)}{\partial y}.\end{aligned}$$

MNÉMO : utiliser les matrices et les abréviations des ingénieurs :

$$\begin{pmatrix}\partial_x f\\ \partial_y f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_x X & \partial_x Y\\ \partial_y X & \partial_y Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_X f\\ \partial_Y f\end{pmatrix}.$$

Exemple 1 (gradient en coordonnées polaires). Supposons f différentiable sur tout le plan. Posons $F : \binom{r}{\theta} \mapsto f\binom{r\cos\theta}{r\sin\theta}$. (Pour les ingénieurs, f et F seraient les mêmes fonctions mais vues avec différentes variables.)

Soient $r > 0$ et $\theta \in \mathbf{R}$. On a alors les égalités (en utilisant les abrévations des ingénieurs)

$$\begin{aligned}\underbrace{\frac{\partial F(r,\theta)}{\partial r}}_{=:\partial_r f} &= \frac{\partial f\binom{r\cos\theta}{r\sin\theta}}{\partial r} = \underbrace{D_1f\begin{pmatrix}r\cos\theta\\ r\sin\theta\end{pmatrix}}_{=:\partial_x f}\underbrace{\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r}}_{=\cos\theta} + \underbrace{D_2f\begin{pmatrix}r\cos\theta\\ r\sin\theta\end{pmatrix}}_{=:\partial_y f}\underbrace{\frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r}}_{=\sin\theta} \text{ et}\\ \underbrace{\frac{\partial F(r,\theta)}{\partial\theta}}_{=:\partial_\theta f} &= \frac{\partial f\binom{r\cos\theta}{r\sin\theta}}{\partial\theta} = D_1f\begin{pmatrix}r\cos\theta\\ r\sin\theta\end{pmatrix}\underbrace{\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial\theta}}_{=-r\sin\theta} + D_2f\begin{pmatrix}r\cos\theta\\ r\sin\theta\end{pmatrix}\underbrace{\frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial\theta}}_{=r\cos\theta},\end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire matriciellement

$$\begin{pmatrix}\partial_r f\\ \partial_\theta f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_x f\\ \partial_y f\end{pmatrix}.$$

La matrice ci-dessus a pour déterminant $\cos\theta(r\cos\theta) - (-r\sin\theta)\sin\theta = r \neq 0$, donc est inversible d'inverse $\frac{1}{r}\begin{pmatrix}r\cos\theta & -\sin\theta\\ r\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. On en déduit

$$\begin{pmatrix}\partial_x f\\ \partial_y f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r}\\ \sin\theta & \frac{\cos\theta}{r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_r f\\ \partial_\theta f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(\cos\theta)\,\partial_r f - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta f\\ (\sin\theta)\,\partial_r f + \frac{\cos\theta}{r}\partial_\theta f\end{pmatrix},$$

ce qui s'écrit en complexes

$$\begin{aligned}\partial_x f + i\partial_y f &= \left((\cos\theta)\,\partial_r f - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta f\right) + i\left((\sin\theta)\,\partial_r f + \frac{\cos\theta}{r}\partial_\theta f\right)\\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)\,\partial_r f + \frac{1}{r}(-\sin\theta + i\cos\theta)\,\partial_\theta f.\end{aligned}$$

Or le vecteur de gauche est le gradient $D_1 f\binom{r\cos\theta}{r\sin\theta} + iD_2 f\binom{r\cos\theta}{r\sin\theta} = \nabla_{\binom{r\cos\theta}{r\sin\theta}} f$ et les deux vecteurs-parenthèses de droite sont les vecteurs u_r et u_θ du repère "polaire".

Finalement, une fois débarrassé des abréviations F et $\partial_? f$, on obtient l'égalité

$$\begin{array}{l}\forall r > 0 \\ \forall \theta \in \mathbf{R}\end{array}, \ \nabla_a f = \frac{\partial f(a)}{\partial r} u_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f(a)}{\partial r} u_\theta \qquad \text{si } a := \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

Exemple 2 (équation des cordes vibrantes). *Soit $c > 0$. On suppose que f est de classe C^2 sur tout le plan (*i. e.* ses dérivées partielles sont définies sur tout le plan et y sont C^1) et vérifie l'égalité*

$$\forall (x,t) \in \mathbf{R}^2, \ \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}.$$

Montrons que f est somme d'une fonction ne dépendant que de $x - ct$ ("onde" se propageant dans le sens positif [dessin]) et d'une fonction ne dépendant que de $x + ct$ ("onde" se propageant dans le sens négatif [dessin]).

Heuristique. Afin d'écrire $f(x,t) = F\binom{x-ct}{x+ct} = F\binom{X}{Y}$ pour un certain F, on définira plutôt $F\binom{X}{Y}$ à partir de $f(x,y)$, ce qui supposer d'inverser le système $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 1 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Le déterminant $2c$ est bien non nul et la matrice s'inverse en $\frac{1}{2c}\begin{pmatrix} c & c \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, d'où $\binom{x}{y} = \frac{1}{2}\binom{X+Y}{\frac{Y-X}{c}}$. On veut alors montrer que $f(x,y) = O^+(X) + O^-(Y)$ pour certains O^+ et O^-, ce qui nous incite à dériver f partiellement deux fois suivant X puis Y (on devra trouver 0).

Résolution. Posons $F : \binom{X}{Y} \mapsto f\binom{\frac{X+Y}{2}}{\frac{Y-X}{2c}}$.

Soit $(X,Y) \in \mathbf{R}^2$. Montrons que $\frac{\partial^2 F(X,Y)}{\partial Y\, \partial X} = 0$. Notons $P := \binom{\frac{X+Y}{2}}{\frac{Y-X}{2c}}$. La première dérivée partielle vaut

$$\begin{aligned} \frac{\partial F\binom{X}{Y}}{\partial X} &= \frac{\partial}{\partial X} f\begin{pmatrix} \frac{X+Y}{2} \\ \frac{Y-X}{2c} \end{pmatrix} \\ &= D_1 f(P) \cdot \frac{\partial \frac{X+Y}{2}}{\partial X} + D_2 f(P) \frac{\partial \frac{Y-X}{2c}}{\partial X} \\ &= \frac{1}{2} D_1 f(P) - \frac{1}{2c} D_2 f(P), \end{aligned}$$

d'où la dérivée partielle "croisée"

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F\binom{X}{Y}}{\partial Y\, \partial X} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial Y} D_1 f\begin{pmatrix} \frac{X+Y}{2} \\ \frac{Y-X}{2c} \end{pmatrix} - \frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial Y} D_2 f\begin{pmatrix} \frac{X+Y}{2} \\ \frac{Y-X}{2c} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\left[D_1(D_1 f)(P) \cdot \frac{\partial \frac{X+Y}{2}}{\partial Y} + D_2(D_1 f)(P) \cdot \frac{\partial\left(\frac{Y-X}{2c}\right)}{\partial Y} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2c}\left[D_1 D_2 f(P) \cdot \frac{\partial \frac{X+Y}{2}}{\partial Y} + D_2 D_2 f(P) \cdot \frac{\partial \frac{Y-X}{2c}}{\partial Y} \right] \\ &= \frac{1}{2}\left(D_1 D_1 f(P) - \frac{1}{c^2} D_2 D_2 f(P) \right) + \frac{1}{2c}\left(D_2 D_1 f(P) - D_1 D_2 f(P) \right) \\ &= \frac{1}{2}\underbrace{\left[D_1 D_1 f - \frac{1}{c^2} D_2 D_2 f \right]}_{=0 \text{ d'après l'hypothèse}}(P) + \frac{1}{2c} \underbrace{\left[D_2 D_1 f - D_1 D_2 f \right]}_{=0 \text{ d'après Schwarz puisque } f \text{ est } C^2} (P) \\ &= 0, \text{ comme annoncé.} \end{aligned}$$

Montrons alors que $F(X,Y)$ est de la forme $D(X) + E(Y)$ pour certaines fonctions D et E. Intuitivement, avec les notations ingénieurs, puisque $\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial p} = 0$, la grandeur $\frac{\partial F}{\partial p}$ ne dépend pas de q, mettons $\frac{\partial F}{\partial p} = Cste(p)$, d'où $\frac{\partial(F - \int Cste(p))}{\partial p} = 0$, donc la grandeur $F - \int Cste(p)$ ne dépend pas de p, mettons $F - Cste(p) = cste(q)$, ce qui conclut.

Formalisons cette intuition. Rappelons pour tout énoncé à deux symboles libres et pour tous ensembles R et S l'équivalence suivante qui permet de faire apparaître des *fonctions* lorsqu'on intervertit des quantificateurs :

$$[\forall r \in R, \ \exists s \in S, \ P(r,s)] \iff \left[\exists s \in S^R, \ \forall r \in R, \ P(r, s(r))\right].$$

On a alors successivement (chaque ligne implique la suivante)

$$\begin{array}{l}
\forall p\in\mathbf{R},\ \forall q\in\mathbf{R},\ \dfrac{\partial}{\partial q}\dfrac{\partial F(p,q)}{\partial p}=0\\
\forall p\in\mathbf{R},\ q\mapsto\dfrac{\partial F(p,q)}{\partial p}\text{ est constante}\\
\forall p\in\mathbf{R},\ \exists C\in\mathbf{R},\ \forall q\in\mathbf{R},\ \dfrac{\partial F(p,q)}{\partial p}=C\\
\exists C\in\mathbf{R}^{\mathbf{R}},\ \forall p\in\mathbf{R},\ \forall q\in\mathbf{R},\ \dfrac{\partial F(p,q)}{\partial p}=C(p)\\
\exists C\in\mathbf{R}^{\mathbf{R}},\ \forall q\in\mathbf{R},\ \forall p\in\mathbf{R},\ \dfrac{\partial F(p,q)}{\partial p}-C(p)=0\\
\exists C\in\mathbf{R}^{\mathbf{R}},\ \forall q\in\mathbf{R},\ \forall p\in\mathbf{R},\ \begin{array}{c}\frac{\partial}{\partial p}(F(p,q)-D(p))=0\\ \text{(où } D \text{ est une primitive de } C\text{)}\end{array}\\
\exists C\in\mathbf{R}^{\mathbf{R}},\ \forall q\in\mathbf{R},\ \begin{array}{c}p\mapsto\frac{\partial}{\partial p}(F(p,q)-D(p))\text{ est constante}\\ \text{(où } D \text{ est une primitive de } C\text{)}\end{array}\\
\exists C\in\mathbf{R}^{\mathbf{R}},\ \forall q\in\mathbf{R},\ \exists E\in\mathbf{R},\ \forall p\in\mathbf{R},\ \begin{array}{c}F(p,q)-D(p)=E\\ \text{(où } D \text{ est une primitive de } C\text{)}\end{array}\\
\exists D\in\mathbf{R}^{\mathbf{R}},\ \forall q\in\mathbf{R},\ \exists E\in\mathbf{R},\ \forall p\in\mathbf{R},\ F(p,q)-D(p)=E\\
\exists D\in\mathbf{R}^{\mathbf{R}},\ \exists E\in\mathbf{R}^{\mathbf{R}},\ \forall q\in\mathbf{R},\ \forall p\in\mathbf{R},\ F(p,q)-D(p)=E(q)\\
\begin{array}{l}\exists D\in\mathbf{R}^{\mathbf{R}}\\ \exists E\in\mathbf{R}^{\mathbf{R}}\end{array},\ \forall(p,q)\in\mathbf{R}^2,\ F(p,q)=D(p)+E(q)\text{, comme annoncé.}
\end{array}$$

Soient enfin D et E deux telles fonctions. On a alors pour tout $(x,t)\in\mathbf{R}^2$ les égalités

$$D(x-ct)+E(x+ct)=F(x-ct,x+ct)=f\begin{pmatrix}\frac{(x-ct)+(x+ct)}{2}\\ \frac{(x+ct)-(x-ct)}{2c}\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}x\\ t\end{pmatrix}\text{, ce qui conclut.}$$

2 Calcul intégral multiple

Pour tout cette section, on notera D une partie du plan (que l'on appellera souvent *domaine*).

Pour définir l'intégrale d'une fonction φ continue sur un segment S, on procédait en trois étapes :

1. cas φ constante : l'intégrale est le produit de la valeur de φ par la longueur de S ;
2. cas φ en escalier : on "recolle" un nombre fini de fonctions constantes, l'intégrale de ce "recollement" est la somme des intégrales des constantes ;
3. cas φ continue : on approche $\varphi=\lim E_n$ par des fonctions en escalier et on prend la limite des intégrales des E_n.

On va suivre exactement le même schéma pour définir l'intégrale d'une fonction continue sur une partie du plan. Cependant, d'une part l'analogue plan du segment, le rectangle, ne sera pas suffisant pour décrire tous les domaines sur lesquels on souhaitera intégrer (disques, triangles...), d'autre part l'aire d'un tel domaine n'est plus aussi triviale à définir que la longueur d'un segment (ce qui fait l'objet de la section 2.1).

Le lecteur uniquement intéressé par le calcul effectif des intégrales doubles pourra sauter les deux sections qui suivent et se rapporter au théorème de Fubini (section 2.3).

2.1 Aire d'une partie fermée borné plane

On va reprendre les trois points ci-dessus pour définir l'aire d'une partie plane : cas d'un rectangle, cas d'une "recollement" fini de rectangles, cas limite d'un "recollement" de rectangles.

(La reprise de la question "*Qu'est-ce qu'un intégrale ?*" du DM 0 serait d'actualité.)

Définition (rectangle, intérieur, aire). *On appelle* ***rectangle*** *tout produit cartésien de deux segments. [dessin]*

*Soit $R =: S \times T$ un rectangle. L'**intérieur** de R est le rectangle R privé de son bord*

$$\mathring{R} := \mathring{S} \times \mathring{T}.$$

*L'**aire** de R est le produit des longueurs de ses côtés*

$$\mathcal{A}(R) := \ell(S) \times \ell(T).$$

Afin d'alléger la présentation de cette section, on notera $\mathcal{R}$ (notation non officielle) l'ensemble des familles finies de rectangles d'intérieurs disjoints :

$$\mathcal{R} = \left\{ (R_i)_{i\in I} \ ;\ I \text{ fini et } \begin{array}{c} \forall i,\ R_i \text{ rectangle et} \\ \forall i \neq j,\ \mathring{R}_i \cap \mathring{R}_j = \emptyset \end{array} \right\}.$$

(analogue : une famille $(R_i) \in \mathcal{R}$ correspond, dans le cas unidimensionnel, à une subdivision d'un segment)

Exemples : [dessin]

Soit $(R_i) \in \mathcal{R}$. Vu que les R_i ne se rencontrent éventuellement qu'en leurs bords et que ces derniers ont une aire nulle, il est raisonnable de définir l'aire de la réunion des R_i comme la somme des aires des rectangles R_i :

$$\mathcal{A}\left(\bigcup_i R_i\right) := \sum_i \mathcal{A}(R_i).$$

Cherchons à présent à comprendre les cas limite sur l'exemple du disque.

Comment pourrait-on approcher l'aire d'un disque ? Quadrillons le plan. [dessin] Il y a des petits carrés entièrement à l'intérieur du disque, certains à cheval sur sa frontière et d'autres entièrement à l'extérieur. Apparemment, plus le maillage est fin, moins les rectangles à cheval prennent de place et, à la limite, leur aire s'évanouit. Il serait donc raisonnable d'encadrer l'aire que l'on cherche à définir entre l'aire "intérieure" du disque (formée des petits carrés entièrement à l'intérieur du disque) et son aire "extérieure" (celle intérieure plus celle des carrés à cheval), ce qui motive les définitions suivantes (non officielles).

Définition (aire intérieure, aire extérieure). *On appelle* ***aires*** *respectivement* ***intérieure*** *et* ***extérieure*** *de D les réels*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^-(D) &= \sup_{(R_i)\in\mathcal{R}} \left\{ \sum_i \mathcal{A}(R_i) \ ;\ \bigcup_i R_i \subset D \right\} \text{ et} \\ \mathcal{A}^+(D) &= \inf_{(R_i)\in\mathcal{R}} \left\{ \sum_i \mathcal{A}(R_i) \ ;\ D \subset \bigcup_i R_i \right\}. \end{aligned}$$

On se demande évidemment si ces aires coïncident, auquel cas on aura un excellent candidat pour l'aire de D :

$$\mathcal{A}^-(D) \stackrel{?}{=} \mathcal{A}^+(D).$$

Cela n'est cependant pas toujours le cas. Voyons une famille de domaines pour lesquels on aura toujours égalité.

Définition (partie bornée, partie fermée).

On dit que D est ***borné*** *s'il est inclus dans un disque,* i. e. *si*

$$\exists R > 0,\ \forall d \in D,\ |d| \leq R.$$

*On dit que D est **fermé** s'il est stable par passage à la limite,* i. e. *si*

$$\forall (d_n) \in D^{\mathbf{N}},\ [(d_n) \text{ converge} \implies \lim d_n \in D]$$

Propriétés (exemples de parties bornées, fermées).
Une union finie ou une intersection de domaines bornés (resp. fermés) reste bornée (resp. fermée.
Si F est un fonction réelle continue définie sur le plan, alors la partie $\{p \in \mathbf{R}^2 \ ;\ F(p) \geq 0\}$ est fermée.
On retiendra qu'est fermé tout domaine défini par un système d'inégalités LARGES et ne mettant en jeu que des conditions "CONTINUES".

Exemples.
Le disque unité (justement appelé) fermé $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ ;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ est fermé borné. [dessin]
Le carré $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ ;\ |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$ est fermé borné. [dessin]
Tout rectangle est fermé borné.
Si φ et Φ sont deux fonctions réelles continues sur un segment $[a, \alpha]$, le domaine

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \ ;\ a \leq x \leq \alpha \text{ et } \varphi(x) \leq y \leq \Phi(x) \right\} \text{ est fermé borné. [dessin]}$$

Si ψ et Ψ sont deux fonctions réelles continues sur un segment $[b, \beta]$, le domaine

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \ ;\ b \leq y \leq \beta \text{ et } \psi(y) \leq x \leq \Psi(y) \right\} \text{ est fermé borné. [dessin]}$$

Théorème – définition (aire d'une partie fermée bornée). *Si D est fermé borné, alors ses aires intérieure et extérieure coïncident : cette valeur commune définit l'**aire** de D et sera notée*

$$\mathcal{A}(D) := \left\{ \begin{array}{c} \sup_{(R_i) \in \mathcal{R}} \left\{ \sum_i \mathcal{A}(R_i) \ ;\ \bigcup_i R_i \subset D \right\} \\ \inf_{(R_i) \in \mathcal{R}} \left\{ \sum_i \mathcal{A}(R_i) \ ;\ D \subset \bigcup_i R_i \right\} \end{array} \right. .$$

Dorénavant, et jusqu'à la fin du cours,
D sera supposé fermé borné.

Exemple (aire d'une "ligne"). Supposons D inclus dans une droite. [dessin] Notons R le rayon d'un disque contenant D (légitime car D est borné). Soit $\varepsilon > 0$. Alors D est inclus dans le rectangle $[-R, R] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$, d'où la comparaison $\mathcal{A}(D) \leq 2R \times 2\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$. Ceci conforte notre intuition : une ligne n'a pas de surface, son aire est nulle.

2.2 Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur une partie fermée bornée plane

Nous venons d'accomplir notre premier point : définir l'aire du domaine d'intégration, ce qui revient à avoir défini l'intégrale d'une fonction constante.
Recollons à présent les fonctions constantes.

Notation (fonctions constantes "par paliers"). On notera (de façon très provisoire)

$$\mathcal{E}(D, \mathbf{K}) := \left\{ f : D \longrightarrow \mathbf{K} \ ;\ \exists (R_i) \in \mathcal{R},\ D \subset \bigcup_i R_i \text{ et } f \text{ constante sur chaque } R_i \cap D \right\}.$$

(analogue des fonctions en escalier)

Exemple. [dessin] Au-dessus de chaque rectangle R_i se trouve un "palier" $f = cste$.

Définition (intégrale d'une fonction constante "par paliers"). *Soit $E \in \mathcal{E}(D, \mathbf{K})$. Soit $(R_i) \in \mathcal{R}$ "adapté" à E. Notons E_i la valeur de E sur R_i pour tout i. L'**intégrale** de E (sur D) est alors définie par*

$$\iint_D E := \sum_i \underbrace{E_i}_{\text{hauteur}} \underbrace{\mathcal{A}(R_i \cap D)}_{\substack{\text{aire}\\ \text{de base}}}.$$

(analogue : définition de l'intégrale des fonctions en escalier)

Exemple. On a $\displaystyle\iint_D 1 = \mathcal{A}(D)$. (analogue : $\int_S 1 = \ell(S)$)

Passons au troisième et dernier point : approcher une fonction continue par une fonction constante "par paliers".

Théorème (approximation des fonction continues par des fonctions constantes "par paliers"). *Soit $f \in C^0(D, \mathbf{K})$. Alors il existe deux suites (E_n^+) et (E_n^-) de $\mathcal{E}(D, \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ tendant uniformément vers f telles que $\forall n \in \mathbf{N},\ E_n^- \leq f \leq E_n^+$.*

Théorème – définition (intégrale d'une fonction continue sur une partie fermée bornée). *Il existe une unique forme linéaire $\displaystyle\iint_D$ sur $C^0(D, \mathbf{K})$ qui coïncide avec $\displaystyle\iint_D$ sur $\mathcal{E}(D, \mathbf{K})$ et qui vérifie l'implication $f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f \implies \displaystyle\iint_D f_n \longrightarrow \iint_D f$ (pour tout f et toute suite (f_n) dans $C^0(D, \mathbf{K})$).*

(analogue : $\int_S$ est l'unique forme linéaire sur $C^0(S, \mathbf{K})$ prolongeant l'intégrale sur $\mathcal{E}(S, \mathbf{K})$ et qui passe à la limite uniforme)

Exemple. Soit f continue positive sur un segment S. [dessin] Notons D le domaine

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \ ; \ x \in S \text{ et } 0 \leq y \leq f(x) \right\}.$$

Considérons une subdivision (a_i) de S et la famille des rectangles $R_i := [a_{i-1}, a_i] \times [0, f(a_i)]$. Alors l'aire associée à ces R_i va tendre vers $\int_S f$.

Notation : si $f \in C^0(D, \mathbf{K})$, on notera indifféremment

$$\iint_D f = \iint_{P \in D} f(P)\, dA$$

où P désigne une symbole muet d'intégration (à penser comme décrivant tout le domaine D d'intégration, ce que signale l'appartenance $P \in D$) et où dA est à penser comme un élément d'aire infinitésimal autour du point P.

(analogue : $\int_S f = \int_{t \in S} f(t)\, dt$ où dt est à penser comme un élément de longueur infinitésimal autour du point P)

2.3 Propriétés de l'intégrale double

Les propriétés sont les mêmes que pour l'intégrale segmentaire : linéarité, positivité, croissance, inégalités triangulaires

$$\iint_D f \leq \mathcal{A}(D) \max_D f \qquad \text{et} \qquad \left| \iint_S fg \right| \leq \max_S |f| \iint_S |g|.$$

On a également une relation "de Chasles"

$$\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} \qquad \begin{array}{c}\text{si } D = D_1 \cup D_2 \text{ où } D_1 \text{ et } D_2 \text{ sont} \\ \text{fermés bornés avec } \mathcal{A}(D_1 \cap D_2) = 0\end{array}$$

(analogue : $\int_{[a,c]} = \int_{[a,b]} + \int_{[b,c]}$ où $a < b < c$). Sanity check : intégrer 1 donne la relation

$$\mathcal{A}(D_1 \cup D_2) = \mathcal{A}(D_1) + \mathcal{A}(D_2) - \mathcal{A}(D_1 \cap D_2)$$

(analogue : remplacer les domaines par des ensembles finis et les aires par les cardinaux).

Pour le calcul effectif, on peut souvent ramener les intégrales doubles à deux intégrales simples emboîtées, tout comme l'on calculait des sommes doubles dans le cours de calcul.

Théorème (Fubini). *Soit $f \in C^0(D, \mathbf{K})$.*
Si D est de la forme $\left\{\binom{x}{y} \in \mathbf{R}^2 \ ; \ a \leq x \leq \alpha \text{ et } \varphi(x) \leq y \leq \Phi(x)\right\}$ pour deux fonctions continues φ et Φ, on a alors [dessin]

$$\iint_D f = \int_{x=a}^{\alpha} \left(\int_{y=\varphi(x)}^{\Phi(x)} f(x,y)\, dy \right) dx.$$

Si D est de la forme $\left\{\binom{x}{y} \in \mathbf{R}^2 \ ; \ b \leq y \leq \beta \text{ et } \psi(y) \leq x \leq \Psi(y)\right\}$ pour deux fonctions continues ψ et Ψ, alors [dessin]

$$\iint_D f = \int_{y=b}^{\beta} \left(\int_{x=\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Cela revient à partionner le domaine d'intégration en rectangles de largeur infinitésimale verticaux (premier cas) ou horizontaux (second cas). (analogue : calcul de somme double dans le cours de calcul)

Remarque. Lorsque $f(x,y)$ est de la forme $u(x)\,v(y)$ (on dit alors qu'on a "séparé les variables") et que les bornes de la seconde intégrale ne dépend pas du symbole d'intégration de la première, on peut réécrire l'intégrale double $\iint_D f$ comme produit de deux intégrales simples :

$$\begin{aligned}
\iint_{[a,\alpha]\times[b,\beta]} f &= \int_{y=b}^{\beta} \left(\int_{x=a}^{\alpha} u(x) \underbrace{v(y)}_{\text{indépendant de } x} dx \right) dy \\
&= \int_{y=b}^{\beta} v(y) \underbrace{\left(\int_{x=a}^{\alpha} u(x)\, dx \right)}_{\text{indépendant de } y} dy \\
&= \left(\int_{x=a}^{\alpha} u(x)\, dx \right) \int_{y=b}^{\beta} v(y)\, dy \\
&= \int_a^{\alpha} u \int_b^{\beta} v.
\end{aligned}$$

En pratique, les parenthèses deviennent lourdes et l'on les oubliera (comme pour les signes $\sum$).

Exemples. (un dessin pour chaque !) Bien vérifier que les intégrandes sont définies et continue sur le domaine d'intégration.

1. Supposons D délimité par la parabole d'équation $y = x^2$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $y = 0$. Cherchons à intégrer la fonction $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 y$. Partionner D en bandes verticales donne

$$\iint_{(x,y)\in D} x^2 y \ dA = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x^2} x^2 y \ dy \ dx = \int_{x=0}^{1} x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^6 dx = \frac{1}{14}.$$

Sanity check : partionner D en bandes horizontales aurait donné

$$\begin{aligned}
\iint_{(x,y)\in D} x^2 y \ dA &= \int_{y=0}^{1} \int_{x=\sqrt{y}}^{1} x^2 y \ dx \ dy = \int_{y=0}^{1} y \left[\frac{x^3}{3} \right]_{\sqrt{y}}^{1} dy = \frac{1}{3} \int_0^1 \left(y - y^{\frac{5}{2}} \right) dy \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{7}{2}} \right) = \frac{1}{3} \frac{7-4}{14} = \frac{1}{14}.
\end{aligned}$$

2. Supposons D délimité le triangle de sommets $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$. Cherchons à intégrer la fonction $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto e^{x^2}$. Si l'on partionne D en bandes horizontales, on obtiendra

$$\iint_{(x,y)\in D} e^{x^2} dA = \int_{y=0}^{1} \int_{x=3-3y}^{3} e^{x^2} dx\ dy,$$

ce qui est impossible à calculer car on ne sait pas primitiver $t \mapsto e^{t^2}$. On va donc partitionner plutôt en bandes verticales, ce qui donne

$$\iint_{(x,y)\in D} e^{x^2} dA = \int_{x=0}^{3} \int_{y=1-\frac{x}{3}}^{1} e^{x^2} dy\ dx = \int_{x=0}^{3} e^{x^2} \frac{x}{3} dx = \frac{1}{6} \int_{x=0}^{3} d\left(e^{x^2}\right) = \frac{e^9-1}{6}.$$

3. Supposons D délimité par l'hyperbole d'équation $xy = \frac{\pi}{2}$ et les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = 2$ et $y = 0$. Cherchons à intégrer la fonction $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \cos(xy)$. Partionner D en bandes verticales (horizontalement, il faudrait distinguer deux cas, ce qui serait pénible) donne

$$\iint_{(x,y)\in D} \cos(xy)\ dA = \int_{x=1}^{2} \int_{y=0}^{\frac{\pi}{2x}} \cos(xy)\ dy\ dx \overset{p:=xy}{=} \int_{x=1}^{2} \int_{p=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos p\ \frac{dp}{x}\ dx = \int_{1}^{2} \frac{1}{\mathrm{Id}} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos = \ln 2.$$

4. Supposons D délimité le triangle de sommets $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Cherchons à intégrer la fonction $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{(x+y)^2}$. Partionner D en bandes horizontales (ici le problème est complètement symétrique en x et y, peu importe la direction des bandes du découpage) donne

$$\begin{aligned}
\iint_{(x,y)\in D} \frac{dA}{(x+y)^2} &= \int_{y=1}^{2} \int_{x=1}^{3-y} \frac{dx}{(x+y)^2} dy \\
&\overset{s:=x+y}{=} \int_{y=1}^{2} \int_{s=1+y}^{3} \frac{ds}{s^2}\ dy \\
&= \int_{y=1}^{2} \left(\frac{1}{1+y} - \frac{1}{3}\right) dy \\
&= \int_{y=1}^{2} \frac{d(1+y)}{1+y} - \frac{1}{3} \int_{1}^{2} 1 \\
&= \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

5. Cherchons à intégrer la fonction $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto (x+y)\sin x \sin y$ sur le carré $[0,\pi]^2$. Partionnons ce dernier en bandes verticales (ici aussi le problème est complèment symétrique en x et y) donne

$$\begin{aligned}
\iint_{(x,y)\in[0,\pi]^2} (x+y)\sin x \sin y\ dA &= \int_{x=0}^{\pi} \int_{y=0}^{\pi} (x+y)\sin x \sin y\ dy\ dx \\
&= \int_{x=0}^{\pi} x \sin x \int_{y=0}^{\pi} \sin y\ dy\ dx + \int_{x=0}^{\pi} \sin x \int_{y=0}^{\pi} y \sin y\ dy\ dx \\
&= \int_{0}^{\pi} \sin y\ dy \int_{0}^{\pi} x \sin x\ dx + \int_{0}^{\pi} y \sin y\ dy \int_{0}^{\pi} \sin x\ dx \\
&= 2 \int_{0}^{\pi} \sin \int_{0}^{\pi} x \sin x\ dx.
\end{aligned}$$

La première intégrale vaut $[-\cos]_0^\pi = 1$, la seconde vaut (après une IPP) $[x(-\cos x)]_0^\pi + \int_0^\pi \cos = \pi$, donc l'intégrale double cherchée vaut 2π.

6. Supposons D formé du carré $[0,1]^2$ privé du disque unité. Cherchons à intégrer la fonction $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{xy}{1+x^2+y^2}$. Partionner D en bandes verticales (encore une symétrie entre x et y) donne

$$\begin{aligned}
\iint_{(x,y)\in D} \frac{xy\ dA}{1+x^2+y^2} &= \int_{x=0}^{1} \int_{y=\sqrt{1-x^2}}^{1} \frac{xy\ dy}{1+x^2+y^2} dx \\
&= \int_{x=0}^{1} \frac{x}{2} \int_{y=\sqrt{1-x^2}}^{1} \frac{d\left(1+x^2+y^2\right)}{1+x^2+y^2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{x=0}^{1} x \ \left[\ln\left(1+x^2+y^2\right)\right]_{y=\sqrt{1-x^2}}^{1} \ dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{0}^{1} x \left(\ln\left(2+x^2\right) - \ln 2\right) dx \\
&= \frac{1}{4} \int_{x=0}^{1} \ln\left(2+x^2\right) \ d\left(2+x^2\right) - \frac{\ln 2}{2} \int_{0}^{1} x dx \\
&\overset{t:=2+x^2}{=} \frac{1}{4} \left[t \ln t - t\right]_{t=2}^{3} - \frac{\ln 2}{2} \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4} \left(3\ln 3 - 3 - 2\ln 2 + 2 - \ln 2\right) \\
&= \frac{3\ln\frac{3}{2} - 1}{4}.
\end{aligned}$$

7. Calculons l'aire du domaine $L := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \ ; \ a^2 - a + \frac{1}{4} \leq b \leq \frac{5}{4} - a \right\}$. Il s'agit d'intégrer 1 sur ce domaine compris entre une parabole et une droite. Pour ce faire, il nous faut d'abord trouver les points limites où la parabole rencontre la droite : ce sont les solutions $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de l'équation $x^2 - x + \frac{1}{4} = y = \frac{5}{4} - x$, ce qui équivaut à $\left\{ \begin{array}{c} y = \frac{5}{4} - x \\ x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} - x \end{array} \right.$, *i. e.* à $\left\{ \begin{array}{c} y = \frac{5}{4} - x \\ x^2 = 1 \end{array} \right.$, *i. e.* à $(x,y) \in \left\{ \left(1, \frac{5}{4}\right), \left(-1, \frac{9}{4}\right) \right\}$. L'aire cherchée vaut donc (en découpant L en bandes verticales (ce qui est adapté à la forme donnée de L))

$$\begin{aligned}
\iint_L 1 &= \int_{x=-1}^{1} \int_{y=x^2-x+\frac{1}{4}}^{\frac{5}{4}-x} dy \ dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\left(\frac{5}{4} - x\right) - \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) \right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) dx \\
&= 2 \int_{0}^{1} \left(1 - x^2\right) dx \qquad \text{car l'intégrande est paire} \\
&= 2 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{1} \\
&= \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

8. Calculons l'aire du domaine $P := \left\{ \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \ ; \ 0 \leq r \leq 1 - \frac{s^2}{9} \right\}$. Il s'agit d'intégrer 1 sur ce domaine compris entre une parabole tournée vers les abscisses négatives et l'axe des ordonnées. Les points limites sont les (x,y) tels que $0 = x = 1 - \frac{y^2}{9}$, *i. e.* les deux points $(1, \pm 3)$. L'aire cherchée vaut donc (en découpant P en bandes horizontales (ce qui est adapté à la forme donnée de P))

$$\iint_D 1 = \int_{y=-3}^{3} \int_{x=0}^{1-\frac{y^2}{9}} dx \ dy \underset{\text{paire en } y}{\overset{\text{intégrande}}{=}} 2 \int_{y=0}^{3} \left(1 - \left(\frac{y}{3}\right)^2\right) 3d\left(\frac{y}{3}\right) \overset{t:=\frac{y}{3}}{=} 6 \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{1} = 4.$$

2.4 Centres de gravité

Question : *trouver le centre de gravité d'un demi-disque plat homogène.* [dessin]

Il est clair que le centre de gravité se trouve sur le rayon médiateur : mais à quelle distance du centre ? Une distance plus petite que la moitié du rayon, c'est certain (car le côté "large" du demi-disque pèse plus) mais peut-on préciser ?

Considérons plus généralement le centre de gravité de D dont les points sont pondérés par une masse surfacique $\mu : D \longrightarrow \mathbf{R}$. Intuitivement, si l'on découpe D en un nombre fini de petits carrés, en notant $\delta m(P)$ la masse d'un carré de centre P, le point d'équilibre cherché est approximativement le barycentre des centres de ces petits carrés pondérés par μ, à savoir le rapport de deux sommes finies $\frac{\sum \delta m(P) \cdot P}{\sum \delta m(P)}$ (on identifie comme d'habitude un point M au vecteur $\overrightarrow{OM}$). Cette approximation semble d'autant plus fine que la taille des carrés diminue et semble tendre, lorsque cette taille s'évanouit, vers le point d'équilibre cherché ; or le rapport précédent tend vers le rapport des sommes infinitésimales $\frac{\iint_{P\in D} \delta m(P) \cdot P}{\iint_{P\in D} \delta m(P)}$. Vu par ailleurs l'approximation $\mu(p) \simeq \frac{\delta m(P)}{\delta A(P)}$ où $\delta A(P)$ désigne l'aire du carré de centre P, il est raisonnable de définir le centre de gravité cherché par

$$\frac{\iint_{P\in D} \mu(P)\, P\ dA}{\iint_{P\in D} \mu(P)\ dA} =: \text{ centre de gravité de } D.$$

Lorsque le domaine est homogène et non nul (en poids), *i. e.* lorsque μ est constante (et non nulle), on peut factoriser μ et la simplifier, d'où l'expression de l'isobarycentre

$$\frac{\iint_{P\in D} P\ dA}{\iint_{P\in D} dA} =: \text{ isobarycentre de } D.$$

Application au demi-disque. Supposons $D = \left\{(a,b) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ |a| \leq 1 \text{ et } 0 \leq b \leq \sqrt{1-a^2}\right\}$.

L'abscisse de l'intégrale $\iint_{P\in D} P\ dA$ vaut

$$\iint_{(x,y)\in D} x\ dA = \int_{x=-1}^{1} \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} x\ dy\ dx = \int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2} dx \underset{\text{impaire}}{\overset{\text{intégrande}}{=}} 0,$$

ce qui est cohérent avec notre argument de symétrie.

L'ordonnée de $\iint_{P\in D} P\ dA$ vaut

$$\iint_{(x,y)\in D} y\ dA = \int_{x=-1}^{1} \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} y\ dy\ dx \underset{\text{paire en } x}{\overset{\text{intégrande}}{=}} 2\int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \left(1-x^2\right) dx = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Or l'aire de D vaut $\frac{\pi}{2}$, donc le centre de gravité de D est situé à distance radiale $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3\pi} \simeq 0,42$, ce qui est bien un peu en-dessous de la moitié.