Comparaison locale

(résumé)

★ dessiner les grands O TRÈS GRANDS et les petits o très petits.

$f \sim g \iff \frac{f}{g} \longrightarrow 1$	$\sim 1 \iff \longrightarrow 1$	
$f = o(g) \iff \frac{f}{g} \longrightarrow 0$	$= o(1) \iff \longrightarrow 0$	$o(q) = o(1)\, q$
$f = O(g) \iff \frac{f}{g}$ borné	$= O(1) \iff$ être borné	$O(q) = O(1)\, q$

★ les "égalités" avec des o ou O sont "polarisées".

★★★ $\sim 0 \iff$ être NUL AU VOISINAGE : cela n'arrive PRATIQUEMENT JAMAIS.
★★★ Utiliser $\sim$ UNIQUEMENT s'il n'y a QUE DES PRODUITS

★★★	La relation $\sim$ n'est	$\sim$ ne voit que le PREMIER	Pour écrire des vraies égalités,
★★★	pas compatible avec +	terme NON NUL dans un DL	transformer $\sim f \iff = f + o(f)$

Pour les fonctions, mêmes définitions & propriétés que pour les suites
mais on ne compare plus forcément au voisinage de ∞,
d'où une propriété EN PLUS : la composition.

Composition ok à droite : si $u \xrightarrow{a} \ell$, alors $f \begin{cases} \overset{\ell}{\sim} g \\ = o_\ell(g) \\ = O_\ell(g) \end{cases} \Longrightarrow f \circ u \begin{cases} \overset{a}{\sim} g \circ u \\ = o_a(g \circ u) \\ = O_a(g \circ u) \end{cases}$ Mais PAS ok à gauche !! (CEG : $e^{n+1} \nsim e^n$)

admettre un $DL_0 \iff$ tendre vers quelque chose $\iff$ être approchable par une constante
(DL_0 souvent ok par théorème généraux sur les limites : si forme indéterminée, on "zoome" en poussant le DL à l'ordre suivant, etc.)
admettre un $DL_1 \iff$ être dérivable $\iff$ être approchable par une droite affine
★ Pour controler le SIGNE dans le DL_2, regarde la POSITION RELATIVE graphe-tangente.

★★ **Taylor-Maclaurin** (ou **Taylor-Young**) : f $C^n \Longrightarrow f$ admet DL_n : $f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k + o(t^n)$.
★★★ $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots$, d'où ch, sh, cos et sin.
★★★ $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \binom{\alpha}{2} t^2 + \cdots$ (comme si $\alpha \in \mathbf{N}$), d'où $\frac{1}{1 \pm t}$, $\ln(1 \pm t)$ et les 3 arc- & 3 arg-.
(★ α ne doit pas dépendre de t ! si oui, revenir à la définition $(1+t)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+t)}$)

Les DLs s'additionnent, se multiplient et se composent (toujours tronquer à l'ordre souhaité).
Les DLs s'intègrent mais NE SE DÉRIVENT PAS.
★★ les DLs se CONTRÔLENT par les graphes et les tangentes.

inégalité de Taylor-Lagrange : si f C^{n+1}, alors le $o(t^n)$ est un $O(t^{n+1})$ majoré par $\frac{\max_{[0,t]} \left|f^{(n+1)}\right|}{(n+1)!} |t|^{n+1}$.

Soient γ courbe paramétrée et $(p < q)$ entiers minimaux tels que $\begin{pmatrix} \gamma^{(p)}(a) \\ \gamma^{(q)}(a) \end{pmatrix}$ base du plan.
Alors l'aspect local du graphe γ dépend des parités de p et q : point ordinaire, d'inflexion, de rebroussement de première espère, de rebroussement de seconde espèce.