Comparaison locale

mardi 28, mercredi 29 mai

Table des matières

L'existence d'une limite donne une idée du comportement local d'une quantité au voisinage d'un point. Peut-on décrire plus précisément ce comportement ? Par exemple, peut-on distinguer les tendances vers 0 des suites $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et e^{-n} ? les tendances de t, t^2, t^{18} et t^{42} ers 0 (resp. 1, resp. ∞) lorsque t tend vers 0 (resp. 1, resp. ∞) ?

Idées : deux quantités auront même comportement si leur rapport tend vers 1, une quantité l'emportera sur l'autre si ce rapport tend vers 0.

1 Équivalence, négligeabilité, domination

1.1 Les relations $\sim$, $= o\left(\right)$ et $= O\left(\right)$ pour les suites

Pour cette partie, on fixe une suite (λ_n) à valeurs scalaires.

Définitions (équivalence, négligeabilité, domination, notation $\sim$, o et O). *Soient (a_n) et (b_n) deux suites scalaires. On dit que*

1. *(a_n) est **équivalente** à (b_n) si on peut écrire (pour tout n assez grand) $a_n = u_n b_n$ pour une certaine suite (u_n) tendant vers 1. On note alors $a_n \overset{n\to\infty}{\sim} b_n$ ou $a_n \sim b_n$ (où le symbole n est muet).*
2. *(a_n) est **négligeable** devant (b_n) (ou que (b_n) est **prépondérante** sur (a_n)) si on peut écrire (pour tout n assez grand) $a_n = z_n b_n$ pour une certaine suite (z_n) tendant vers 0. On note alors $a_n \overset{n\to\infty}{=} o\left(b_n\right)$ ou $a_n = o_{n\to\infty}\left(b_n\right)$ ou $a_n = o\left(b_n\right)$ (où le symbole n est muet) et on lit "a_n est un petit o de b_n".*
3. *(a_n) est **dominée** par (b_n) si on peut écrire (pour tout n assez grand) $a_n = \Theta_n b_n$ pour une certaine suite (Θ_n) bornée. On note alors $a_n \overset{n\to\infty}{=} O\left(b_n\right)$ ou $a_n = O_{n\to\infty}\left(b_n\right)$ ou $a_n = O\left(b_n\right)$ (où le symbole n est muet) et on lit "a_n est un grand O de b_n".*

★ Observer de suite que $\lambda_n \sim 0$ signifie $\lambda_n = 0$ pour tout n assez grand. Ce cas étant rarissime en pratique, on devra se poser des questions si l'on le rencontre.

Lorsque b_n est non nul pour tout n assez grand, les définitions ci-dessus se reformulent suivant l'idée de l'introduction :

$$\begin{array}{ccc} a_n \sim b_n & \iff & \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow 1 \\ a_n = o\left(b_n\right) & \iff & \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow 0 \\ a_n = O\left(b_n\right) & \iff & \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \text{ bornée} \end{array}.$$

Exemples (négligeabilité) : $n = o\left(n^2\right)$, $\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Les "**croissances comparées**" s'écrivent avec ce nouveau langage (on fixe deux réels α et β strictement positifs)

$$(\ln n)^\alpha = o\left(n^\beta\right) \qquad n^\beta = o\left(e^n\right) \qquad e^n = o\left(n!\right).$$

★★ ABUS DE ★ ★ NOTATION ★★ La notation $o(\lambda_n)$ désigne UNE suite de la forme $(z_n \lambda_n)$ (où $z_n \longrightarrow 0$) : la relation "$= o(\lambda_n)$" N'est donc PAS une égalité. Par exemple, on a les "égalités" $\begin{cases} n = o\left(n^3\right) \\ n^2 = o\left(n^3\right) \end{cases}$ cependant que les suites (n) et $\left(n^2\right)$ diffèrent. Ainsi, lorsqu'on dit "être un petit o de", le verbe "être" décrit une *propriété* (être de telle forme) et non une *identification* (être identique à). *Idem* pour "$= O(\lambda_n)$".

On retiendra que les "égalités" mettant en jeu des petits o ou des grands O (faire la liaison) sont *polarisées*. On pourrait imaginer lever l'ambiguïté en écrivant $a_n \overrightarrow{=} o(b_n)$: l'usage consacre cependant l'écriture d'égalités tout court en faisant appel à l'intelligence du lecteur.

Exemples de traduction.

Un $O(1)$ est une suite bornée.

Un $o(1)$ est une suite tendant vers 0.

Si λ est un scalaire NON NUL, la tendance $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ équivaut (logiquement) à l'équivalence $\lambda_n \sim \lambda$ (c'était faux pour $\lambda = 0$: la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers 0 mais n'est pas nulle à partir d'un certain rang).

Les égalités $o(1) + o(1) = o(1)$ et $42o(1) = o(1)$ viennent du fait que les suites tendant vers 0 forment un espace vectoriel.

Les égalités $O(1) + O(1) = O(1)$ et $18O(1) = O(1)$ viennent du fait que les suites bornées forment un espace vectoriel.

L'égalité $O(1)\, o(1) = o(1)$ traduit le fait que le produit d'une suite bornée par une suite tendant vers 0 tend vers 0.

Par définition, on a $O(\lambda_n) = O(1)\, \lambda_n$ et $o(\lambda_n) = o(1)\, \lambda_n$.

La relation "$\sim \lambda_n$" coïncide avec celle "$= \lambda_n + o(\lambda_n)$" : en effet, d'une part on a les égalités $\lambda_n + o(\lambda_n) = \lambda_n + o(1)\, \lambda_n = \lambda_n (1 + o(1))$, d'autre part "tendre vers 1" équivaut à "valoir 1 plus quelque chose tendant vers 0". **Interprétation** : être équivalent à λ_n, c'est valoir λ_n à quelque chose près négligeable devant λ_n (cela colle avec l'idée de "avoir même comportement")

Exemples. On reprend tous ceux du cours sur les suites en les réécrivant dans notre nouveau langage.
$e^{in} = O(1)$, $\cos n = O(1)$, $\sin n = O(1)$.
$\frac{1}{n} = o(1)$, $\arctan n \sim \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{th} n \sim 1$.
$e^{-n} + \frac{1}{n} = o(1) + o(1) = o(1)$.
$\frac{e^{i\sqrt{n}}}{\sqrt[3]{n}} = e^{i\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = O(1)\, o(1) = o(1)$.
$\frac{\sin^{43} n}{n+1} + e^{i\sqrt{n}} \operatorname{th}^{18} n = O(1)\, o(1) + O(1)\, O(1) = O(1) + O(1) = O(1)$.

Propriété (structure des $O(\lambda_n)$ et des $o(\lambda_n)$). *Les $O(\lambda_n)$ et les $o(\lambda_n)$ forment deux sous-espaces vectoriels stables par multiplication par n'importe quel $O(1)$.*

(Traduit que le fait que les suites bornées et les suites tendant vers 0 forment deux sous-espaces vectoriels stables par multiplication par n'importe quelle suite bornée.)

Propriété (transitivité de $\sim$, $= o()$ et $= O()$). *Les relations $\sim$, $= o()$ et $= O()$ sont transitives au sens où, si $\mathcal{R}$ désigne l'une d'entre elles, on a pour toutes suites a, b et c l'implication*

$$\begin{cases} a_n \,\mathcal{R}\, b_n \\ b_n \,\mathcal{R}\, c_n \end{cases} \Longrightarrow a_n \,\mathcal{R}\, c_n.$$

(Ainsi se comportent-elles un peu comme la relation d'ordre $\leq$, ce qui conforte notre intuition de la négligeabilité.)

Propriété (compatibilité avec la multiplication de $\sim$, $= o()$ et $= O()$). *Les relations $\sim$, $= o()$ et $= O()$ sont compatibles avec la multiplication au sens où, si $\mathcal{R}$ désigne l'une d'entre elles, on a pour toutes suites a, b, α et β l'implication*

$$\begin{cases} a_n \,\mathcal{R}\, b_n \\ \alpha_n \,\mathcal{R}\, \beta_n \end{cases} \Longrightarrow a_n \alpha_n \,\mathcal{R}\, b_n \beta_n.$$

Ceci s'avérera pratique surtout pour la relation $\sim$. Toutefois :

★★★ Les relations $\sim$, $= o()$ et $= O()$ NE ★★
★★ sont PAS compatibles avec l'addition !!! ★★★

Contre-exemples. On a les équivalences $\begin{cases} n \sim n \\ (-1)^n - n \sim -n \end{cases}$ mais pas celle $(-1)^n \sim 0$. On a les négligeabilités $n^2 = o(n \pm n^3)$ mais pas celle $2n^2 = o(2n)$.

Garde-fou :

1. toujours écrire des ÉGALITÉS (même polarisées) avec des o ou O mais sans $\sim$ en remplaçant les équivalences "$\sim \lambda_n$" par des égalités "$= \lambda_n + o(\lambda_n)$" ;
2. réserver $\sim$ UNIQUEMENT lorsque les suites étudiées ne mettent en jeu QUE des produits ou des quotients.

1.2 Les relations $\sim$, $= o()$ et $= O()$ pour les fonctions

Pour cette partie, on fixe un intervalle infini I ainsi qu'un point a intérieur à I.

Définitions (équivalence, négligeabilité, domination, notation $\sim$, o et O). *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a à valeurs scalaires. On dit que*

1. *f est **équivalente** à g si on peut écrire $f = ug$ au voisinage de a pour une certaine fonction u tendant vers* 1 en a. *On note alors $f(t) \overset{t \to a}{\sim} g(t)$ (où le symbole t* est muet*) ou $f \overset{a}{\sim} g$.*
2. *f est **négligeable** devant g (ou que g est **prépondérante** sur f) si on peut écrire $f = zg$ au voisinage de a pour une certaine fonction z tendant vers* 0 en a. *On note alors $f(t) \overset{t \to a}{=} o(g(t))$ (où le symbole t* est muet*) ou $f \overset{a}{=} o(g)$ et on lit "f est un petit o de g".*
3. *f est **dominée** par g si on peut écrire $f = \Theta g_n$ au voisinage de a pour une certaine fonction Θ bornée (au voisinage de a). On note alors $f(t) \overset{t \to a}{=} O(g(t))$ (où le symbole t* est muet*) ou $f \overset{a}{=} O(g)$ et on lit "f est un grand O de g".*

Le langage est exactement le même que pour les suites. On retrouvera ainsi les mêmes propriétés. Cependant, comme pour les limites, le point au voisinage duquel on compare localement n'est pas nécessairement ∞ : il peut être n'importe quel élément de $\overline{\mathbf{R}}$, ce qui peut complètement changer le comportement local comme le montrent les négligeabilités $t^2 \overset{t \to 0}{=} o(t)$ et $t \overset{t \to \infty}{=} o(t^2)$.

Exemples. *Donner des équivalents simples lorsque $t \to 0$ (resp. $t \to \infty$) des quantités suivantes.*

1. $3t^2 + 2t - 1$.
   Lorsque $t \to 0$, c'est la plus *petite* puissance qui prépondère : on a $3t^2 = o(1)$ et $2t = o(1)$, donc la quantité équivaut à
   $$3t^2 + 2t - 1 = o(1) + o(1) - 1 = -1 + o(-1) \sim -1.$$
   Quant $t \to \infty$, c'est la plus *grande* puissance qui prépondère : on a $2t - 1 = o(t^2)$, d'où
   $$3t^2 + 2t - 1 = 3t^2 + o(3t^2) \sim 3t^2.$$
2. $t + \sqrt{t}$.
   Quand $t \to 0$, c'est la plus *petite* puissance qui prépondère : on a $t = o\left(t^{\frac{1}{2}}\right) = o(\sqrt{t})$, donc la quantité équivaut à $\sqrt{t}$.
   Lorsque $t \to \infty$, c'est la plus *grande* puissance qui prépondère : on a $\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}} = o(t)$, donc la quantité équivaut à t.
3. $\ln t + (\ln t)^2$.
   Quand $t \to 0$, on a $\ln t = o\left((\ln t)^2\right)$ puisque $|\ln t| \to \infty$, donc la quantité équivaut à $(\ln t)^2$.
   Quand $t \to \infty$, on a $(\ln t)^2 = o(\ln t)$ puisque $|\ln t| \to \infty$, donc la quantité équivaut à $\ln t$.

4. $t+1-\ln t$.
Quand $t\to 0$, on a $\ln t \longrightarrow -\infty$, d'où $t+1=O(1)=o(\ln t)$, donc la quantité équivaut à $-\ln t$.
Quand $t\to\infty$, les croissances comparées nous disent que c'est t qui "pilote" :
$$t+1-\ln t = t+o(t)+o(t) = t+o(t)\sim t.$$

5. $t+\sqrt{t+1}$.
Quand $t\to 0$, la quantité tend vers $0+\sqrt{0+1}=1$ (par continuité de $\sqrt{\mathrm{Id}}$), donc équivaut à 1.
Quant $t\to\infty$, on a $\sqrt{t+1}=\sqrt{t}\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{t}}}_{\longrightarrow 1}\sim\sqrt{t}=o(t)$, donc la quantité équivaut à t.

6. $e^t+e^{2t}-2$.
Quand $t\to 0$, la quantité tend (par continuité de exp) vers $e^0+e^{2\cdot 0}-2=1+1-2=0$, ce qui ne donne pas d'équivalent. Il faut affiner. Puisque $\exp' 0=1$, on peut (lorsque $x\to 0$) écrire $\frac{e^x-e^0}{x-0}\sim 1$, *i. e.* $e^x-1\sim x$, *i. e.* $e^x-1=x+o(x)$, *i. e.* $e^x=1+x+o(x)$. On en déduit (par composition)
$$e^t+e^{2t}-2=(1+t+o(t))+(1+2t+o_{2t\to 0}(2t))-2=3t+o_{t\to 0}(t)\sim 3t.$$
Lorsque $t\to\infty$, c'est l'exponentielle de plus grande puissance qui prépondère :
$$e^t+e^{2t}-2=o\left(e^{2t}\right)+e^{2t}+o\left(e^{2t}\right)\sim e^{2t}.$$

7. $\sqrt{1+t}-1-\sqrt{t}$.
Quand $t\to 0$, la quantité tend (par continuité de $\sqrt{\mathrm{Id}}$) vers $\sqrt{1+0}-1-\sqrt{0}=1-1-0=0$, ce qui ne donne pas d'équivalent. Affinons : puisque $\sqrt{\mathrm{Id}}'(1)=\frac{1}{2}$, on peut écrire $\frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1}}{t-0}\sim\frac{1}{2}$, d'où $\sqrt{1+t}-1\sim\frac{t}{2}=o\left(\sqrt{t}\right)$ et
$$\sqrt{1+t}-1-\sqrt{t}=o\left(\sqrt{t}\right)-\sqrt{t}\sim-\sqrt{t}.$$
Lorsque $t\to\infty$, on a une forme indéterminée $\infty-\infty$. On peut lever l'indétermination en conjuguant
$$\sqrt{1+t}-\sqrt{t}=\frac{(1+t)-(t)}{\sqrt{1+t}+\sqrt{t}}\leq\frac{1}{2\sqrt{t}}\longrightarrow 0,$$
ce qui montre que la quantité tend vers -1.

8. $e^t+\cos t+3\sin^2 t-2$.
Lorsque $t\to\infty$, tout est borné sauf l'exponentielle (qui tend vers ∞), d'où
$$e^t+\cos t+3\sin^2 t-2=e^t+O(1)=e^t+o\left(e^t\right)\sim e^t.$$
Lorsque $t\to 0$, la quantité tend (par continuité des applications considérées) vers $e^0+\cos 0+3\sin^2 0-2=1+1+0-2=0$, ce qui ne permet pas de conclure. On a déjà vu l'égalité $e^t=1+t+o(t)$ découlant de $\exp' 0=1$. On montrerait de même $\cos t=1+o(t)$, d'où (en se rappelant $\sin^2 t\sim t^2=o(t)$)
$$e^t+\cos t+3\sin^2 t-2=(1+t+o(t))+(1+o(t))+o(t)-2=t+o(t)\sim t.$$

Comme pour les limites, lorsque l'on passe des suites aux fonctions, une propriété supplémentaire apparaît, liée à la composition.

Proposition (compatibilité pour la composition À DROITE de $\sim$, $=o()$ et $=O()$). *Soit u une fonction définie au voisinage de a et tendant vers un certain réel ℓ. On a alors les implications*
$$\begin{array}{ccc} f\overset{\ell}{\sim}g & \Longrightarrow & f\circ u\overset{a}{\sim}g\circ u \\ f\overset{\ell}{=}o(g) & \Longrightarrow & f\circ u\overset{a}{=}o(g\circ u) \\ f\overset{\ell}{=}O(g) & \Longrightarrow & f\circ u\overset{a}{=}O(g\circ u) \end{array}.$$

Application. *Donner un équivalent simple de* $\arccos(1-a)$ *lorsque* $a \to 0$.

Soient $t \neq 0$ et $a \in \left]0,2\right[$ deux réels. Vu que $\arccos(1-a) \overset{a\to 0}{\longrightarrow} 0$ et que $\sin t = t \underbrace{\frac{\sin t - \sin 0}{t-0}}_{\longrightarrow \sin' 0 = 1} \sim t$ lorsque $t \to 0$, on peut écrire (lorsque $a \to 0$)

$$\arccos(1-a) \sim \sin\arccos(1-a) = \sqrt{1-(1-a)^2} = \sqrt{2a-a^2} \sim \sqrt{2a}.$$

★ La composition dans l'autre sens n'assure rien : en effet, pourquoi u (que l'on applique sur un produit) préserverait le produit, la tendance vers 0 ou vers 1 ou encore le fait d'être borné ? Typiquement, on a (lorsque $t \to \infty$) l'équivalence $t+1 \sim t$ mais $e^{t+1} = ee^t \nsim e^t$ (de fait, exp ne conserve ni le produit ni la tendance vers 1).

Exemples (calcul de limites). *Donner sens à et trouver les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{t\to 0} \sqrt{\frac{3t-t^2}{\sin t - \frac{t^4}{4}}}$;
2. $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{e^t + \ln t + t^4}{\sin t + \sqrt{t^2+1} + 3e^t}$;
3. $\lim_{t\to\infty} \cos t \sin\frac{1}{t}$;
4. $\lim_{t\to\frac{1}{2}} \left(2t^2-3t+1\right)\tan(t\pi)$.

Pour les fractions, on a dans les deux cas une forme indéterminée ($\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$). Afin de lever l'indétermination, il s'agit d'intuiter quel terme "pilote" au numérateur et qui "pilote" au dénominateur. Le reste n'est que vérification de cette intuition.

1. Soit $t \neq 0$. (Toutes les comparaisons seront prises lorsque $t \to 0$.) Puisque $t^2 = o(t)$, le numérateur équivaut à
$$3t - t^2 = 3t + o(t) \sim 3t.$$
De même, vu que $\sin t \sim t$ et que $\frac{t^4}{4} = o(t)$, le dénominateur équivaut à
$$\sin t - \frac{t^4}{4} = t + o(t) + o(t) = t + o(t) \sim t$$
(et donc ne s'annule pas pour t suffisamment proche de 0). Le rapport est donc bien défini au voisinage de 0 et équivaut à $\frac{3t-t^2}{\sin t - \frac{t^4}{4}} \sim \frac{3t}{t} = 3$, donc tend vers 3. Enfin, puisque la fonction $\sqrt{\mathrm{Id}}$ est continue, la (première) limite cherchée vaut $\sqrt{3}$.
2. Soit $t > 0$ réel. (Toutes les comparaisons seront prises lorsque $t \to \infty$.)Les croissances comparées nous disent que c'est e^t qui "pilote" en haut comme en bas. En effet, d'une part les négligeabilités $\ln t = o\left(t^4\right)$ et $t^4 = o(e^t)$ montrent que le numérateur équivaut à
$$e^t + \ln t + t^4 = e^t + o\left(e^t\right) + o\left(e^t\right) \sim e^t,$$
d'autre part les comparaisons $\sqrt{t^2+1} = t\sqrt{1+\frac{1}{t^2}} \sim t = o(e^t)$ et $\sin t = O(1) = o(e^t)$ montrent que le dénominateur équivaut à
$$\sin t + \sqrt{t^2+1} + 3e^t = o\left(e^t\right) + o\left(e^t\right) + 3e^t \sim 3e^t$$
(et donc ne s'annule pas pour t suffisamment grand). Le rapport est donc bien défini au voisinage de 0 et équivaut à $\frac{e^t+\ln t+t^4}{\sin t+\sqrt{t^2+1}+3e^t} \sim \frac{e^t}{3e^t} = \frac{1}{3}$, d'où la (deuxième) limite cherchée.
3. Soit $t \neq 0$ réel. (Toutes les comparaisons seront prises lorsque $t \to \infty$.)Puisque $\frac{1}{t} \to 0$, on a par composition $\sin\frac{1}{t} \sim \frac{1}{t} = o(1)$, d'où les comparaisons $\cos t \sin\frac{1}{t} = O(1)\, o(1) = o(1)$. La (troisième) limite cherchée est donc nulle.
4. On a une forme indéterminée (0∞). Soit t un réel non entier. Posons $\varepsilon := t - \frac{1}{2}$. (Toutes les comparaisons seront prises lorsque $t \to \frac{1}{2}$, *i. e.* lorsque $\varepsilon \to 0$). On a alors les comparaisons
$$\begin{aligned} 2t^2-3t+1 &= (2t-1)(t-1) = 2\varepsilon\left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right) = 2\varepsilon^2 - \varepsilon = o(\varepsilon) - \varepsilon \sim \varepsilon \text{ et} \\ \tan\pi t &= \tan\left(\pi\left(\varepsilon + \frac{1}{2}\right)\right) = \tan\left(\pi\varepsilon + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\pi\varepsilon = -\frac{\cos\pi\varepsilon}{\sin\pi\varepsilon} \sim \frac{1}{\pi\varepsilon}, \end{aligned}$$
d'où l'équivalent $\left(2t^2-3t+1\right)\tan\pi t \sim \varepsilon\frac{1}{\pi\varepsilon} = \frac{1}{\pi}$, ce qui montre que la (dernière) limite cherchée vaut $\frac{1}{\pi}$.

2 Développements limités

On fixe pour cette section un entier $n \in \mathbf{N}$, un intervalle I infini, un point a intérieur à I, une fonction f définie au voisinage de a à valeurs scalaires et un réel t tel que $a + t \in I$. Toutes les comparaisons seront (sauf mention contraire) prises lorsque $t \to 0$.

2.1 Approximation locale par un polynôme

La continuité de f en a assurerait que l'on peut raisonnablement approcher f au voisinage de a par le polynôme constant $f(a)$. La dérivabilité en a assurerait de même que l'on peut raisonnablement approcher f au voisinage de a par le polynôme affine $f(a) + f'(a)(\mathrm{Id} - a)$. Les développements limités généralisent ces approximations polynomiales à tout degré (pas seulement 0 et 1).

Définition (développement limité). *On dit que f admet un* ***développement limité*** *en a à l'ordre n (en abrégé : $DL_n(a)$) s'il y a des scalaires $a_0, a_1, ..., a_n$ et un voisinage V de 0 tels que*

$$\forall t \in V,\ f(a+t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + o(t^n).$$

Remarquer que f admet un $DL_n(a)$ ssi $f(a + \mathrm{Id})$ admet un $DL_n(0)$.

Par ailleurs, si f admet un $DL_n(a)$, alors f admet un $DL_m(a)$ pour tout entier $m \in [0, n]$. Interprétation : plus l'ordre d'un DL est élevé, meilleure est l'approximation locale.

On vérifiera de plus que :

0. admettre un $DL_0(a)$ équivaut à être *continu* en a ;
1. admettre un $DL_1(a)$ équivaut à être *dérivable* en a ;
2. ★ admettre un $DL_2(a)$ *N'équivaut PAS* à être de classe C^2 ou deux fois dérivable au voisinage a !

Contre-exemple. Notons $J :=]-18, 42[$ et $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc}]-18,42[& & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} x^3 \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$. Supposons $t \neq 0$ dans J.

On a $\varphi(t) = O(t^3) = o(t^2)$, donc φ admet un DL_2 (en particulier est continue).

La fonction φ' est définie sur $J \setminus \{0\}$ et l'on a

$$\varphi'(t) = 3t^2 \sin \frac{1}{t} - t \cos \frac{1}{t} = O(t^2) + O(t) = o(1) + o(1) \longrightarrow 0,$$

ce qui montre que φ est dérivable en 0 avec $\varphi'(0) = 0$.

Montrons que φ' n'est pas dérivable en 0. Le taux d'accroissement (en 0) vaut

$$\frac{\varphi'(t) - \varphi'(0)}{t - 0} = 3t \sin \frac{1}{t} - \cos \frac{1}{t} = o(1) - \cos \frac{1}{t};$$

s'il possédait une limite, alors $\cos \frac{1}{t}$ aussi, ce qui n'est pas.

Proposition (unicité d'un DL). *Si f admet deux $DL_n(a)$, alors les coefficients de ces derniers coïncident.*

Interprétation : f ne se laisse bien approcher que par AU PLUS UN polynôme de $\mathbf{K}_n[X]$.

Différence entre DLs et équivalents. Ces deux notions décrivent des approximations locales. Voyons en quoi elles diffèrent sur l'exemple de cos.

On a déjà établi l'équivalent $\frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{2\sin^2 \frac{t}{2}}{t^2} \sim \frac{2\left(\frac{t}{2}\right)^2}{t^2} = \frac{1}{2}$, d'où l'on tire successivement $\frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2} + o(1)$, $1 - \cos t = \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ et le $DL_2(0)$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Cette égalité signifie la parabole graphe de $1 - \frac{\mathrm{Id}^2}{2}$ "colle bien" au graphe de cos au voisinage de $(0, \cos 0)$.

Il serait très tentant de réécrire cela sous la forme $\cos t \sim 1 - \frac{t^2}{2}$ (d'autant plus que la fainéantise nous incite à ne pas écrire deux fois t^2). Or cette dernière équivalence est tout aussi valide que $\cos t \sim 1 + \frac{t^2}{2}$, $\cos t \sim 1 + t^2$ ou encore $\cos t \sim 1 + t^{42}$ puisque les deux membres tendent dans tous les cas vers 1 ; et pourtant il serait faux (d'après l'unicité du $DL_2(0)$) d'écrire $\cos t \overset{?}{=} 1 + \frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)$, $\cos t \overset{?}{=} 1 + t^2 + o\left(t^2\right)$ ou encore $\cos t \overset{?}{=} 1 + t^{42} + o\left(t^{42}\right)$.

★ On retiendra que

l'équivalence $\sim$ ne voit que le PREMIER terme NON NUL d'un développement limité.

Ce dernier est donc toujours plus précis qu'une équivalence et il sera courant, afin de déterminer un équivalent simple, d'effectuer des DLs.

2.2 Calculs de DLs

Lorsque f est un polynôme et a vaut 0, l'exercice 10 du T. G. 19 nous dit que $f(t)$ peut se réécrire $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k$. Il est donc raisonnable, dans le cas général, de comparer $f(a+t)$ au polynôme $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} t^k$. La proposition suivante montre qu'il s'agit là d'une bonne approximation si f est suffisamment régulière.

Proposition (Taylor-Maclaurin version "petit o") (existence de DLs). *Si f est de classe C^n au voisinage de a, alors f admet un $DL_n(a)$ donné par*

$$\begin{aligned} f(a+t) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} t^k + o(t^n) \\ &= 1 + f(a)\, t + \frac{f''(a)}{2} t^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + o(t^n) . \end{aligned}$$

Cette proposition s'applique à toutes les fonctions C^∞, donc à presque toutes les fonctions usuelles.

Exemples (DLs de $\exp$**,** ch**,** sh**,** $\cos$**,** $\sin$**,** $(1+t)^\alpha$**).**
La fonction exp est C^∞ et de dérivée elle-même, d'où

$$e^t = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} + o(t^n) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \cdots$$

(on retrouve la définition du cours de e^t "tronquée" au degré n). On en déduit les parties paires et impaires de e^t, à savoir

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} t &= \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{2n} \frac{t^k}{k!} + o\left(t^{2n}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-t)^k}{k!} + \underbrace{o_{-t\to 0}\left((-t)^{2n}\right)}_{=o_{t\to 0}\left(t^{2n}\right)}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{t^k + (-t)^k}{2} \frac{1}{k!} + o\left(t^{2n}\right) \\ &= 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} + \cdots + \frac{t^{2n}}{(2n)!} + o\left(t^{2n}\right) \qquad \text{et} \\ \operatorname{sh} t &= \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ &= t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(t^{2n+1}\right) , \end{aligned}$$

d'où l'on déduit les (co)sinus circulaires :

$$\begin{aligned}
\cos t &= \operatorname{ch}(it) \\
&= 1+\frac{(it)^2}{2}+\frac{(it)^4}{4!}+\frac{(it)^6}{6!}+\cdots+\frac{(it)^{2n}}{(2n)!}+o_{it\to 0}\left((it)^{2n}\right) \\
&= 1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}+o\left(t^{2n}\right) \qquad \text{et} \\
\sin t &= \frac{\operatorname{sh}(it)}{i} \\
&= \frac{1}{i}\left((it)+\frac{(it)^3}{3!}+\frac{(it)^5}{5!}+\cdots+\frac{(it)^{2n+1}}{(2n+1)!}+o_{it\to 0}\left((it)^{2n+1}\right)\right) \\
&= t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(t^{2n+1}\right)
\end{aligned}$$

Soit $\alpha\in\mathbf{C}$. Rappelons la définition $\binom{\alpha}{k}:=\frac{\overbrace{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots}^{k\text{ facteurs}}}{k!}$ pour tout entier $k\in\mathbf{N}$. L'intérêt de cette notation est l'égalité $\frac{\partial^k}{\partial t^k}(1+t)^\alpha = k!\binom{\alpha}{k}(1+t)^{\alpha-k}$ valide pour tout $k\in\mathbf{N}$, d'où l'on déduit (par la proposition précédente) le développement

$$(1+t)^\alpha = 1+\alpha t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2+\binom{\alpha}{3}t^3+\cdots+\binom{\alpha}{n}t^n+o(t^n)$$

(observer que le $o(t^n)$ est nul lorsque α est un entier naturel inférieur à n d'après la formule du binôme de Newton).

On trouverait par exemple (le détail du calcul des $\binom{\alpha}{k}$ dans chaque cas est laissé au soin du lecteur) :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-t} &= 1+t+t^2+t^3+\cdots+t^n+o(t^n), \\
\sqrt{1+t} &= 1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+o\left(t^2\right), \\
\frac{1}{\sqrt{1-t}} &= 1+\frac{t}{2}+\frac{3t^2}{8}+o\left(t^2\right).
\end{aligned}$$

★ Dans le DL de $(1+t)^\alpha$, l'exposant α NE doit PAS DÉPENDRE de t ! Par exemple, il est tentant d'écrire le DL_1

$$\begin{aligned}
&(1+t)^{\frac{1}{t}} \overset{?}{=} 1+\frac{1}{t}t+o(t)=2+o(1)\longrightarrow 2 \text{ mais le } DL_2 \text{ donnerait} \\
&(1+t)^{\frac{1}{t}} \overset{?}{=} 1+\frac{1}{t}t+\frac{\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}-1\right)}{2}t^2+o(t)=\frac{5}{2}-\frac{t}{2}+o(t)\longrightarrow\frac{5}{2},
\end{aligned}$$

ce qui est contradictoire. Pour pallier cette difficulté, il suffit de revenir à la définition $(1+t)^\alpha = e^{\alpha(1+t)}$:

$$(1+t)^{\frac{1}{t}} = e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)} = e^{\frac{1}{t}(t+o(t))} = e^{1+o(1)} \longrightarrow e.$$

Opérations sur les DLs. Nous allons voir que les DLs s'ajoutent, se multiplient, se composent, s'intègrent mais ne se dérivent pas.

Il n'y a rien à retenir, sinon TOUJOURS écrire des ÉGALITÉS (pas de $\sim$!) et TRONQUER toutes les puissances trop grandes.

Exemple (somme de DLs). À l'ordre 2, on a

$$\sin t+\sqrt{1-t} = \left(t+o\left(t^2\right)\right)+\left(1-\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+o(t)\right) = 1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+o(t).$$

Exemple (produit de DLs). À l'ordre 3, on a

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{ch} t}{1+t} &= \frac{1}{1-(-t)}\operatorname{ch} t = \left(1-t+t^2-t^3+o\left(t^3\right)\right)\left(1+\frac{t^2}{2}+o\left(t^3\right)\right) \\ &= 1+(-t)+\left(\frac{t^2}{2}+t^2\right)+\left(-\frac{t^3}{2}-t^3\right)+o\left(t^3\right) \begin{array}{l}+t^4\times(\text{un polynôme}) \\ +o\left(t^4\right)\times(\text{un polynôme})\end{array} ;\end{aligned}$$

or les polynômes sont continus, donc bornés (au voisinage de 0), donc les derniers termes ci-dessous se réécrivent respectivement $t^4 O(1) = O\left(t^4\right) = o\left(t^3\right)$ et $o\left(t^4\right) O(1) = o\left(t^4\right) = o\left(t^3\right)$, donc sont "avalés" par le $o\left(t^3\right)$ qui les précède. On obtient finalement

$$\frac{\operatorname{ch} t}{1+t} = 1-t+\frac{3t^2}{2}-\frac{3t^3}{2}+o\left(t^3\right).$$

En pratique, on ne détaillera plus cette étape (montrer qu'il est inutile d'écrire les puissances trop grandes) et l'on écrira tout ce qui dépasse directement en un seul petit o.

Exemple (composition de DLs). Reprenons l'exemple de $(1+t)^{\frac{1}{t}}$ et essayons de le développer à l'ordre 1. On a les égalités

$$(1+t)^{\frac{1}{t}} = e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)} = \exp\left(\frac{1}{t}\left(t-\frac{t^2}{2}+o\left(t^2\right)\right)\right) = \exp\left(1-\frac{t}{2}+o(t)\right) = e\cdot e^{-\frac{t}{2}+o(t)}.$$

L'exposant $\square := -\frac{t}{2}+o(t)$ tendant vers 0, on peut utiliser le $DL_1(0)$ de exp :

$$e^{-\frac{t}{2}+o(t)} = 1+\square+o_{\square\to 0}(\square).$$

Le dernier terme s'écrit $z\left(-\frac{t}{2}+o(t)\right)\times\square$ où z est une fonction tendant vers 0 en 0, donc s'écrit en particulier $Z(t)\left(-\frac{t}{2}+t\zeta(t)\right)$ où Z et ζ sont deux fonctions tendant vers 0 en 0, ce qui s'écrit aussi $\left[Z\zeta-\frac{Z}{2}\right](t)\times t$ où la fonction $Z\zeta-\frac{Z}{2}$ tend vers 0 en 0. Ce calcul un peu fastidieux nous montre que le $o_{\square\to 0}(\square)$ est en fait tout simplement un $o(t)$. Il est alors aisé de finir le calcul :

$$(1+t)^{\frac{1}{t}} = e\cdot e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)} = e\left(1+\left(-\frac{t}{2}+o(t)\right)+o(t)\right) = e-\frac{et}{2}+o(t).$$

En pratique, on ne détaillera plus (comme on vient de le faire) la "composition" des o et l'on pourra directement utiliser la proposition suivante.

Proposition (composition de DLs). *Soient $(p,q)\in\mathbf{N}^2$, $(P,Q)\in\mathbf{K}_p[X]\times\mathbf{K}_q[X]$ et g une fonction à valeurs scalaires définie au voisinage de $f(a)$ tel que $f(t)=P(t)+o(t^p)$ et $g(f(a)+s)\overset{s\to 0}{=}Q(s)+o(s^q)$. On a alors l'égalité*

$$g(f(a+t)) = Q(P(t))+o\left(t^{\min\{p,q\}}\right).$$

On retiendra que composer des DLs revient à composer (et tronquer) des polynômes.

Exemple. Effectuons un $DL_3(0)$ de $x\mapsto\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}$. On a les égalités

$$\begin{aligned}\frac{1}{e}(1+t)^{\frac{1}{t}} &= e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)-1} = \exp\left(\frac{1}{t}\left(t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+o\left(t^4\right)\right)-1\right) = \exp\left(-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}-\frac{t^3}{4}+o\left(t^3\right)\right) \\ &= 1+\left(-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}-\frac{t^3}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}\right)^2+\frac{1}{6}\left(-\frac{t}{2}\right)^3+o\left(t^3\right) \\ &= 1-\frac{t}{2}+\frac{11t^2}{24}-\frac{7t^3}{16}+o\left(t^3\right).\end{aligned}$$

Bien sûr, on retrouve le coefficient $-\frac{1}{2}$ obtenu précédemment.

Proposition (intégration de DLs). *Si f admet un $DL_n(a)$, mettons*

$$f(a+t) = a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_nt^n+o(t^n),$$

alors toute primitive F de f admet un $DL_{n+1}(a)$ donné par

$$F(a+t) = F(a) + a_0 t + \frac{a_1}{2} t^2 + \frac{a_2}{3} t^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} + o\left(t^{n+1}\right).$$

On retiendra que l'on peut intégrer les DLs terme à terme, ★ sans oublier la constante !

Exemples ($\ln(1+t)$, $\tan$).
Puisque $\frac{\partial}{\partial t} \ln(1+t) = \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \cdots + (-1)^n t^n + o(t^n)$, intégrer donne

$$\ln(1+t) = \underbrace{\ln 1}_{=0} + t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + o(t^n).$$

[dessin] Le premier terme donne la tangente en 1 du graphe de ln, le signe du deuxième terme signifie que ce graphe est en-dessous de cette tangente.

De même, vu que les dérivées des six fonctions réciproques trigonométriques sont de la formes $u \mapsto \left(\pm 1 \pm u^2\right)^\alpha$, il sera aisé d'en obtenir un DL à tout ordre connaissant celui de $(1+t)^\alpha$. Par exemple, vu que $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{argsh} t = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = 1 - \frac{1}{2} t^2 + \frac{3}{8} t^4 + o\left(t^4\right)$, on obtiendra $\operatorname{argsh} t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{3t^5}{40} + o\left(t^5\right)$.

★ Comme pour $\ln(1+t)$, tous ces DLs devront être contrôlés sur le graphe de la fonction considérée : la tangente correspond au DL_1, le signe du terme quadratique à la positive relative du graphe par rapport à cette tangente.

Voyons à présent comment obtenir un DL de tan par intégration. Vu la tangente en l'origine ($\tan' 0 = 1$), on peut écrire $\tan t = t + o(t)$, d'où

$$\begin{aligned} \tan' t &= 1 + \tan^2 t = 1 + (t + o(t))^2 = 1 + t^2 (1 + o(1))^2 = 1 + t^2 (1 + o(1))^2 \\ &= 1 + t^2 + o\left(t^2\right), \text{ ce qui après intégration donne } \tan t = t + \frac{t^3}{3} + o\left(t^3\right) \end{aligned}$$

([dessin] bien contrôler sur le graphe de tan le signe du terme suivant t). Réinjectons ce nouveau DL :

$$\begin{aligned} \tan' t &= 1 + \tan^2 t = 1 + \left(t + \frac{t^3}{3} + o\left(t^3\right)\right)^2 = 1 + t^2 \left(1 + \frac{t^2}{3} + o\left(t^2\right)\right)^2 = 1 + t^2 \left(1 + 2\frac{t^2}{3} + o\left(t^2\right)\right) \\ &= 1 + t^2 + \frac{2t^4}{3} + o\left(t^4\right), \text{ d'où } \tan t = t + \frac{t^3}{3} + \frac{2}{15} t^5 + o\left(t^5\right). \end{aligned}$$

On pourrait montrer (exercice !) que le terme suivant est $\frac{17}{315} t^7$.

Cette même méthode s'applique à th (au vu de sa dérivée $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2$) et donnerait

$$\operatorname{th} t = t - \frac{t^3}{3} + o\left(t^4\right).$$

Afin d'apprécier cette méthode par intégration, le lecteur pourra calculer les dérivées successives de tan, ou bien effectuer un quotient de DL de sin par cos, ou encore composer les DLs de tan et arctan et identifier (grâce à l'unicité) les coefficients obtenus avec ceux du DL de $\operatorname{Id} = \tan \circ \arctan$.

★ On NE peut PAS DÉRIVER en général les DLs !

Contre-exemple. Posons $f(x) := x^2 \sin \frac{1}{x}$ pour tout réel $x \neq 0$ (et $f(0) := 0$). Alors $f(t) = o(t)$, donc f admet un $DL_1(0)$. Cependant, on a $f'(t) = 2t \sin \frac{1}{t} + t^2 \left(\cos \frac{1}{t}\right) \frac{-1}{t^2} = -\cos \frac{1}{t} + o(1)$ qui n'admet pas de limite, donc f' n'admet pas de $DL_0(0)$.

Toutefois, SI f est $C^{\underline{\underline{n+1}}}$, alors on peut obtenir le $DL_n(a)$ de f' en dérivant celui de f (on "triche" en intégrant le DL de f'). On pourra donc dériver les DL de fonctions C^∞.

2.3 Contrôle de l'erreur

Question : dans l'égalité $f(a+t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} t^k + o(t^n)$ de Taylor-Maclaurin version "petit o", peut-on estimer l'erreur (aussi appelé reste) $o(t^n)$? La quantifier ? La réponse est OUI.

Proposition (Taylor-Maclaurin version "intégrale"). *Supposons f de classe C^{n+1}. Alors le $o(t^n)$ dans l'égalité précédente vaut exactement l'intégrale*

$$\int_0^t \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+x)\,dx.$$

Idée de démonstration. Récurrence + IPP. Ce qui suppose de connaître la formule... Pour la retrouver, on se ramène au cas $a=0$ (duquel on déduit aisément le cas général) et on calcule l'intégrale $\int_0^t 0 f(x)\,dx) = 0$ en effectuant $n+2$ intégration par parties :

$$\begin{array}{cccccc} \multicolumn{6}{c}{\xrightarrow{\hspace{20em}}} \\ f(x) & f'(x) & f''(x) & f'''(x) & \cdots & f^{(n+1)}(x) \\ 0 & 1 & x-t & \frac{(x-t)^2}{2} & \cdots & \frac{(x-t)^n}{2} \\ \multicolumn{6}{c}{\xleftarrow{\hspace{20em}}} \end{array}$$ (les flèches indique le sens de dérivation).

Prendre les puissances de $\underline{\underline{x-t}}$ (au lieu de celles de x) permet de tuer la moitié des crochets : ces derniers valent alors $f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k$ et la dernière intégrale vaut $-\int_0^t \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,dx$.

Corollaire (Taylor-Maclaurin version "inégalité"). *Supposons f de classe C^{n+1}. Alors le $o(t^n)$ dans l'égalité de Taylor-Maclaurin est un $O(t^{n+1})$. Plus précisément, le $O(1)$ dans le $O(t^{n+1})$ est borné par*

$$\frac{1}{(n+1)!} \max_{[a,a+t]} \left| f^{(n+1)} \right|.$$

Démonstration. Notons M le maximum ci-dessus. Il suffit de majorer le reste intégral (en distinguant selon le signe de t)

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+x)\,dx \right| &\leq \int_{[0,t]} \frac{|t-x|^n}{n!} \underbrace{\left| f^{(n+1)}(a+x) \right|}_{\leq M} dx \leq \frac{M}{n!} \int_{x\in[0,t]} |t-x|^n\,dx \\ &\overset{y:=t-x}{=} \frac{M}{n!} \int_{y\in[0,t]} |y|^n\,dy = \frac{M}{n!} \int_0^{|t|} z^n dz = \frac{M}{(n+1)!} |t|^{n+1}. \end{aligned}$$

Application (calcul mental). *Calculer* $\ln 1,003$ *avec une précision de huit décimales.*

Notons $f : x \mapsto \ln(1+x)$. On a $\frac{\partial}{\partial t} f(t) = \frac{1}{1+t}$, d'où l'égalité $\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} f(t) = \frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}$ et la comparaison

$$\frac{1}{n+1} \max_{[0,0+t]} \left| f^{(n+1)} \right| \leq \frac{1}{n+1} \frac{1}{|1+t|^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1},$$

ce qui montre que l'erreur $\left| f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right| = \left| f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{t^k}{k} \right|$ est majorée par $\frac{t^{n+1}}{n+1}$. Ainsi, si l'on désinvoque t et définit $t := 0,003$, on aura $\frac{t^3}{3} = 9 \cdot 10^{-9} < 10^{-8}$, ce qui montre que l'erreur sera (si $n=2$) inférieure à 10^{-8}, d'où l'approximation cherchée à huit décimales :

$$\ln 1,003 \simeq t - \frac{t^2}{2} = 0,003 - 0,000\ 004\ 5 = 0,00299550.$$

2.4 Retour sur les courbes paramétrées

On suppose ici que f est à valeurs complexes, donc définit une courbe paramétrée plane.

On suppose de plus que les dérivées de f en a qui font sens ne sont pas toutes colinéaires. On peut donc définir un plus petit entier $p \in \mathbf{N}$ tel que $f^{(p)}(a) \neq 0$ puis un plus petit entier $q \geq p$ tel que la famille $\begin{pmatrix} f^{(p)}(a) \\ f^{(q)}(a) \end{pmatrix}$ soit libre. Regardons le graphe de f au voisinage de $f(a)$ dans la base $(u,v) = \left(\frac{f^{(p)}(a)}{p!}, \frac{f^{(q)}(a)}{q!} \right)$.

L'égalité de Taylor version "petit o" s'écrit $f(a+t) = t^p u + t^q v + o\left(t^{q+1}\right)$, d'où l'approximation locale

$$f(a+t) \simeq (t^p, t^q) \text{ dans la base } (u, v).$$

Ainsi, en selon les parités de p et q, le graphe de f traversera ou non les axes $\mathbf{R}u$ (tangente) et $\mathbf{R}v$, ce qui donne quatre comportements de référence au voisinage de $f(a)$: [dessins]

$q \diagdown p$	impair	pair
impair	point d'inflexion	point ordinaire
pair	point de rebroussement de première espèce	point de rebroussement de seconde espèce