Intégration sur un segment

(résumé)

★★★ ★★ CONNAÎTRE SES DÉRIVÉES : $\left\{ \begin{array}{c} \text{polynômes, exponentielles, logarithmes, puissances,} \\ \text{fonctions trigonométriques circulaires et hyperboliques} \\ \text{ainsi que leurs réciproques : arc \& arg \& co.} \end{array} \right.$

intégration = ACTE d'intégrer = APPLICATION d'une forme linéaire $\int$
intégrale = RÉSULTAT de l'intégration = IMAGE par une forme linéaire $\int$
intégrande = CE QUE l'on intègre = ARGUMENT d'une forme linéaire $\int$

en escalier = constant par morceaux. $\mathcal{E}(S, \mathbf{K})$ sev de $\mathbf{K}^S$ stable par produit

$\alpha_n \xrightarrow{\text{unif.}} f \underset{\text{pour les suites}}{\overset{\text{définition comme}}{\Longleftrightarrow}} (\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N},\ n \geq N \Longrightarrow |f - \alpha_n| \leq \varepsilon)$

$f\ C^0_{\text{pm}} \Longrightarrow \exists \underbrace{E_n^{\pm}}_{\text{en escalier}} \xrightarrow{\text{unif.}} f$ tq $E_n^- \leq f \leq E_n^+$ (dessin du cours indispensable)

intégrale d'une fonction constante sur S : $\int_S a = \ell(S)\ a$

$\left. \begin{array}{c} \text{intégrale d'une fonction } E \text{ en escalier} \\ \text{valant } E_k \text{ sur } I_k :=]a_{k-1}, a_k[\text{ où} \\ (a_k) \text{ est subdivision adaptée à } E \end{array} \right\}$: $\int E = \sum_k \ell(I_k) E_k$

$\int$ est "continue", linéaire et (si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$) croisssante :

$$f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f \Longrightarrow \int f_n \longrightarrow \int f \qquad \int (\lambda f + g) = \lambda \int f + \int g \qquad f \leq g \Longrightarrow \int f \leq \int g$$

★ $\int$ ne voit pas les singletons. ★★ $\left. \begin{array}{c} \int f = 0 \text{ et } f \text{ de signe cst} \\ \text{ET } f \text{ CONTINUE} \end{array} \right\} \Longrightarrow f = 0$ (★ faux si f C^0_{pm})

inégalités triangulaires : $\left|\int f\right| \leq \int |f|$ $\qquad \left|\int fg\right| \leq \max |f| \int |g|$.

relation de Chasles : $\int_a^{\lozenge} f + \int_{\lozenge}^b f = \int_a^b f$ ★ attention à l'ordre $a \leq b$: $\left\{ \begin{array}{c} \text{PAS TOUJOURS } \left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| \\ \text{NI } f \leq g \Longrightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g \end{array} \right.$

★★★ théorème fondamental de l'analyse

$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^t f = f(t) \left\{ \begin{array}{c} \text{SI } f \text{ CONTINUE} \\ \bigstar \text{ faux si } f\ C^0_{\text{pm}} \end{array} \right.$ ★★ $\left. \begin{array}{c} \text{TRÈS UTILE} \\ \text{si } F \text{ de classe } C^1 \end{array} \right\}$: $\int_a^b F' = F(b) - F(a)$

★★ reparamétrage. $\int_{t=a}^b f\left(\boxed{\varphi(t)}\right) d\boxed{\varphi(t)} = \int_{\Box = \boxed{\varphi(a)}}^{\boxed{\varphi(b)}} f(\Box)\, d\Box$ $\left(\begin{array}{c} \text{les hypothèses disent que} \\ \text{les intégrandes sont } C^0_{\text{pm}} \end{array} \right)$

permet souvent d'aboutir à $\int_{t=a}^b d(F(t)) = F(b) - F(a)$

★★ intégration par parties $\int fg = [fG] - \int f'G$ (si $G' = g$) $\left(\begin{array}{c} \text{les hypothèses disent que} \\ \text{les intégrandes sont } C^0_{\text{pm}} \end{array} \right)$

Présenter $\left\downarrow \begin{array}{ccc} f(t) & \cdots & g(t)\,dt \\ & \diagdown^{+} & \\ f'(t)\,dt & \cdots^{-} & G(t) \end{array} \right\uparrow$ où les flèches indiquent le sens de dérivation. $\left(\begin{array}{c} \cdots = \text{intégrale} \\ \diagdown = \text{crochets} \end{array} \right)$

Si l'on veut itérer des IPPs, on pourra présenter $\left\downarrow \begin{array}{ccc} f & & g \\ & \diagdown^{+} & \\ f' & \cdots^{-} & G \end{array} \right\uparrow$ en continuant vers le bas et en alternant les signes des crochets.