Intégration segmentaire

mercredi 15, mercredi 22 mai

Table des matières

Comme d'habitude, la lettre $\mathbf{K}$ désignera l'un des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
Dans tout le chapitre, S désignera un segment de $\mathbf{R}$ dont on notera $\ell(S)$ la longueur.

On renvoie à la correction du DM 0 pour donner l'idée de ce qu'est une intégrale.

1. Dans le cas particulier d'une fonction f à valeurs positives définie sur S, on sait calculer l'aire située sous le graphe lorsque f est constante : il suffit de multiplier la longueur de S (la "base" du rectangle) par la valeur prise par f (la "hauteur" du rectangle).
2. En joignant bout à bout de telles fonctions, on pourra calculer l'aire sous le graphe de toute fonction formée par "morceaux" de fonctions constantes.
3. Enfin, si une fonction f s'"approche bien" par une suite (f_n) de fonctions constantes par morceaux, il sera naturel de définir l'intégrale de f comme la limite de celles de f_n.

Noter que, dans le procédé ci-dessus, on ne perd rien en remplaçant $\mathbf{R}_+$ par $\mathbf{K}$, à condition de pondérer au besoin l'aire par un signe -1 ou par un imaginaire i.

Ce qui précède décrit le cherminement naturel pour construire l'intégrale de fonctions "limites" sur un segment de fonctions constantes (à valeurs dans $\mathbf{K}$) par morceaux. Le programme se limite cependant aux fonctions continues par morceaux, lesquelles tombent dans ce cadre.

1 Intégration sur un segment d'une fonction continue par morceaux

1.1 Intégration d'une fonction constante par morceaux

Définition (subdivision). *On appelle* ***subdivision*** *de S toute suite finie strictement croissante commençant par $\min S$ et finissant par $\max S$.*

Définition (fonctions par morceaux, fonctions en escalier, subdivisions adaptées). On considère un adjectif Q qualifiant certaines applications de $\mathbf{K}^S$.

Soit $f \in \mathbf{K}^S$. On dit que f est Q ***par morceaux*** *(sur S) s'il existe une subdivision $(a_0, a_1, ..., a_n)$ de S telle que, pour tout entier $i \in [1, n]$, la restriction $f_{|]a_{i-1},a_i[}$ se prolonge sur le segment $[a_{i-1}, a_i]$ en une application Q. Une telle subdivision est dite* ***adaptée*** *à f.*

Si l'on note $\mathcal{C}$ l'ensemble des applications de $\mathbf{K}^S$ qui sont Q, il est alors usuel de noter $\mathcal{C}_{\text{p. m.}}(S, \mathbf{K})$ l'ensemble des applications de S vers $\mathbf{K}$ qui sont Q par morceaux

Lorsque Q est l'adjectif "constant", une application constante par morceaux est dite ***en escalier****. On note $\mathcal{E}(S,\mathbf{K})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur S à valeurs dans $\mathbf{K}$.*

Exemples : la partie entière restreinte à S, [dessin : autres exemples génériques]

Contre-exemples : $\frac{1}{\mathrm{Id}}$ (prolongée par n'importe quoi en 0) n'est pas continue par morceaux [dessin] car n'admet pas de limite finie en 0, même remarque pour $\sin\circ\frac{1}{\mathrm{Id}}$ [dessin].

Proposition. *Soit $\mathcal{C}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^S$ stable par produit. Alors $\mathcal{C}_{\text{p. m.}}(S,\mathbf{K})$ est aussi un sous-espace vectoriel de K^S stable par produit.*

Idée de démonstration. [dessin] Soient f et g dans $\mathcal{C}$. Alors une subdivision adaptée à toute combinaison linéaire de f et g s'obtient en réunissant une subdivision adaptée à f avec une subdivision adaptée à g.

Corollaire (structure de $\mathcal{E}(S,\mathbf{K})$). *Les fonctions en escalier sur S forment un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^S$ stable par produit.*

Définition (intégrale sur $\mathcal{E}(S,\mathbf{K})$). *Soit $E\in\mathcal{E}(S,\mathbf{K})$. Soit $(a_0,a_1,...,a_n)$ une subdivision adaptée à E. Pour tout entier $i\in[1,n]$, notons E_i la valeurs prises par E sur $]a_{i-1},a_1[$. Alors le scalaire $\sum_{i=1}^n(a_i-a_{i-1})E_i$ ne dépend pas de la subdivision choisie : on le note $\int_S E$ et on l'appelle l'****intégrale*** *de E sur S.*

Interprétation : si E est à valeurs positives, l'intégrale $\int_S E$ modélise l'aire délimitée par le graphe de E, l'axe des abscisses et les droites verticales d'abscisses $\min S$ et $\max S$. Si E est valeurs réelles, il faut compter *négativement* les aires situées *au-dessus de* son graphe.

Remarque. [dessin] L'intégrale ne "voit" pas les valeurs prises par la fonction E en les points d'une subdivision qui lui est adaptée.

Corollaire. Deux fonctions en escalier coïncidant sur S sauf peut-être en un nombre fini de points ont même intégrale (sur S)

À RETENIR : l'intégrale ne voit pas les singletons.

1.2 Vers la construction de l'intégrale des fonctions continues par morceaux

Question : comment prolonger l'intégrale sur S à d'autres fonctions que celles en escalier ?

Idée : pour définir l'intégrale d'une fonction f, on va essayer de trouver une suite (E_n) de fonctions en escalier qui "tend vers" f en un certain sens : on pourra alors définir $\int_S f:=\lim\int_S E_n$.

Précisons tout d'abord ce "certain sens". On collera pour cela de très près aux notions d'approximation et de convergence des suites de scalaires.

Définition (approximation et convergence uniformes). Soit $f\in\mathbf{K}^S$.

Soient $\varepsilon>0$ et $\alpha\in\mathbf{K}^S$. *On dit que α* ***approxime*** *f* ***uniformément*** *à ε près si $|f-\alpha|\leq\varepsilon$.* [dessin cylindre de largeur 2ε].

Soit $(\alpha_n)\in\left(\mathbf{K}^S\right)^{\mathbf{N}}$. *On dit que α_n* ***tend uniformément vers*** *f (et on note alors $\alpha_n\overset{\text{unif.}}{\longrightarrow}f$) si*

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbf{N},\ n\geq N\Longrightarrow|f-\alpha_n|\leq\varepsilon.$$

Remarques.

Lorsque les fonctions ci-dessus sont *constantes*, on retrouve exactement l'approximation et la convergence de scalaires.

Comme pour les suites, on a l'équivalence $\alpha_n\overset{\text{unif.}}{\longrightarrow}f\Longleftrightarrow|\alpha_n-f|\overset{\text{unif.}}{\longrightarrow}0$.

Dans le cas général, on prendra garde à ce que les comparaisons ci-dessus ont lieu entre *fonctions* :

$$\underbrace{|f-\alpha|}_{\text{fonction}}\leq\underbrace{\varepsilon}_{\substack{\text{fonction}\\ \text{constante}}}\quad\text{signifie }\forall s\in S,\ |f(s)-\alpha(s)|\leq\varepsilon.$$

La terminologie *uniforme* vient alors de ce que le *même* ε fonctionne pour *tous* les s.

Exemple 1. [dessin] Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit une fonction α_n sur $[0,1]$ comme valant $\frac{i-1}{n}$ sur $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right[$ pour tout entier $i \in [1,n]$ (et 1 en 1).

Montrons que $\alpha_k \overset{\text{unif.}}{\longrightarrow} \mathrm{Id}$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Sur chaque segment $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$, la différence $\mathrm{Id} - \alpha_n$ est bornée par $\frac{1}{n}$, d'où la comparaison $|\mathrm{Id} - \alpha_n| \leq \frac{1}{n}$ sur la réunion de ces segments, à savoir sur tout $[0,1]$. Puisque $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$, on peut conclure.

Étudions la suite $\left(\int_{[0,1]} \alpha_k\right)$. Puisque α_n est en escalier, on peut calculer

$$\int_{[0,1]} \alpha_n = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right)}_{\text{base du rectangle}} \underbrace{\frac{i-1}{n}}_{\text{hauteur}} \overset{i \leftarrow j+1}{=} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n}\frac{j}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1} j = \frac{1}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{1-\frac{1}{n}}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Cette valeur correspond à l'aire attendue, celle d'un triangle isocèle rectangle "moitié" du carré unité.

[dessin] On aurait pu procéder exactement de même en approchant Id "par au-dessus" à l'aide d'une fonction β_n valant $\frac{i}{n}$ sur $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right[$: le calcul aurait donné $\int_{[0,1]} \beta_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{2}$ (donc une intégrale plus grande, ce qui est normal) qui tend vers le même réel $\frac{1}{2}$.

Exemple 2. [dessin] On approche de même la fonction Id^2 sur $[0,1]$ "par en-dessous" par une suite (α_n) et "par au-dessus" par une suite (β_n). On montrerait comme précédemment que ces deux suites tendent uniformément vers Id^2. Les intégrales valent par ailleurs

$$\int_{[0,1]} \alpha_n = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{base du rectangle}} \underbrace{\left(\frac{i-1}{n}\right)^2}_{\text{hauteur}} = \frac{1}{n^3}\sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \frac{1}{n^3}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}{6} \longrightarrow \frac{1}{3},$$

ce qui est cohérent à la valeur attendue par le calcul "lycéen" $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

Ces deux exemples témoignent d'une généralité : on peut toujours "bien" approcher une fonction continue (et même par morceaux) par des fonctions en escalier, "par au-dessus" comme "par en-dessous".

Théorème (approximation des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier). *Soit $f \in C^0_{\text{p. m.}}(S, \mathbf{K})$. Alors il existe deux suites (E_n^+) et (E_n^-) dans $\mathcal{E}(S, \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ tendant uniformément vers f telles que $\forall n \in \mathbf{N},\ E_n^- \leq f \leq E_n^+$.* [dessin]

1.3 Définition et propriétés de l'intégrale des fonctions continues par morceaux

Théorème - définition (intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux). *Il existe sur $C^0_{\text{p. m.}}(S, \mathbf{K})$ une unique forme linéaire, notée $\int_S$, telle que*

1. *$\int_S$ coïncide sur $\mathcal{E}(S, \mathbf{K})$ avec $\int_S$ (d'où la même notation) ;*
2. *pour toute suite $(f_n) \in C^0_{\text{p. m.}}(S, \mathbf{K})^{\mathbf{N}}$ et pour toute fonction $f \in C^0_{\text{p. m.}}(S, \mathbf{K})$, on a l'implication*

$$f_n \overset{\text{unif.}}{\longrightarrow} f \Longrightarrow \int_S f_n \longrightarrow \int_S f.$$

Vocabulaire (intégrale, intégrande). Un argument de $\int_S$ est appelé une ***intégrande*** (ce qu'on intègre), une image par $\int_S$ est appelée une ***intégrale*** (le résultat de l'intégration).

Notations (ancien dt, relation de Chasles) Soit $f \in C^0_{\text{p. m.}}(S, \mathbf{K})$

On pourra noter $\int_S f(t)\,dt$ ou $\int_{t\in S} f(t)\,dt$ l'intégrale $\int_S f$, ces deux dernières notations rappelant l'interprétation en termes d'aires (dt est la base du "rectangle", $f(t)$ sa hauteur). Bien évidemment, le symbole t est *muet* dans ces deux notations.

Soient α et β deux réels de S. On définit

$$\int_\alpha^\beta f := \begin{cases} \int_{[\alpha,\beta]} f \text{ si } \alpha \leq \beta \\ -\int_{[\beta,\alpha]} f \text{ si } \alpha > \beta \end{cases}$$ avec les mêmes deux variantes (avec symbole muet) que précédemment .

Ces notations permettent d'avoir la relation suivante (dite **de Chasles**) pour tous $(a,b,c)\in S^3$:

$$\int_a^b f+\int_b^c f=\int_a^c f.$$

Application. *Calculer* $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{7}{4}}\lfloor t\rfloor\,dt$. [dessin]

On découpe le segment $\left[-\frac{1}{2},\frac{7}{4}\right]$ en segment où l'intégrande se décrit facilement :

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{7}{4}}\lfloor t\rfloor\,dt &= \int_{-\frac{1}{2}}^{0}\lfloor t\rfloor\,dt+\int_0^1\lfloor t\rfloor\,dt+\int_1^{\frac{7}{4}}\lfloor t\rfloor\,dt\\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{0}(-1)+\int_0^1 0+\int_1^{\frac{7}{4}}1\\
&= \left(0-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)(-1)+(1-0)\,0+\left(\frac{7}{4}-1\right)1\\
&= -\frac{1}{2}+0+\frac{3}{4}\\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

On aurait également pu utiliser la subdivision "naturellement" adaptée à l'intégrande (qui est en escalier). Le résultat est conforme à l'interprétation en termes d'aire signée.

Propriété (linéarité et croissance). *L'application* $\int_S$ *est linéaire.*
Si $\mathbf{K}=\mathbf{R}$*, on a de plus l'implication suivante pour tout* $(f,g)\in C^0_{\text{p. m.}}(S,\mathbf{R})^2$ *:*

$$f\le g\Longrightarrow\int_S f\le\int_S g.$$

Propriété (inégalité triangulaire). *On a pour tout* $f\in C^0_{\text{p. m.}}(S,\mathbf{R})$ *la comparaison*

$$\left|\int_S f\right|\le\int_S|f|.$$

★ ATTENTION AUX SIGNES : il est faux d'écrire en général $\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b|f|$ car il se pourrait que $a>b$.

Démonstration. **Idée** : la comparaison est vérifiée lorsque f est en escalier (elle devient alors l'inégalité triangulaire classique entre scalaires) et va passer "à la limite". Précisons cela.

Soit (E_n) une suite de fonction en escalier tendant uniformément vers f. Soient $n\in\mathbf{N}$ et $(a_0,a_1,...,a_k)$ une subdivision adaptée à E_n. On a alors (avec les notations évidentes) les comparaisons

$$\left|\int_S E_n\right|=\left|\sum_{i=1}^k(a_i-a_{i-1})\,E_{n,i}\right|\underset{\text{triangulaire}}{\overset{\text{inégalité}}{\le}}\sum_{i=1}^k|a_i-a_{i-1}|\,|E_{n,i}|\underset{\text{croissent}}{\overset{\text{car les }a_j}{=}}\sum_{i=1}^k(a_i-a_{i-1})\,|E_{n,i}|=\int_S|E_n|.$$

Puisque $E_n\overset{\text{unif.}}{\longrightarrow}f$, le membre de gauche tend vers $\left|\int_S f\right|$. Puisque par ailleurs $||E_n|-|f||\le|E_n-f|\overset{\text{unif.}}{\longrightarrow}0$, l'intégrande du membre de droite tend uniformément vers $|f|$, donc son intégrale tend vers $\int|f|$. Il reste à rappeler que les inégalités larges entre suites réelles sont conservées par passage à la limite.

Corollaire. *Soient* f *et* g *deux fonctions continues par morceaux sur* S*. On a la comparaison*

$$\left|\int_S fg\right|\le\left(\max_S|f|\right)\int_S|g|.$$

Intérêt : si l'intégrande contient un facteur dont la tête ne nous revient pas mais que l'on sait borner, on peut sortir ce facteur embêtant de l'intégrale. Par exemple, l'intégrale $\int_0^1 t^2e^{-\cos^{42}t}dt$ semble difficile à calculer à cause de l'exposant mais, vu que l'exponentielle est bornée par 1 (le cosinus reste positif sur $[0,1]$), on pourra toujours la borner par $\int_0^1 t^2dt=\frac{1}{3}$.

Sous-corollaire. *On a pour tout $f \in C^0_{\text{p. m.}}(S, \mathbf{K})$ la comparaison*

$$\left|\int_S f\right| \leq \ell(S)\left(\max_s |f|\right).$$

Interprétation : [dessin] si $f \geq 0$, l'aire en-dessous le graphe de f est plus petite que celle du grand rectangle.

Définition (valeur moyenne). *Soit $f \in C^0_{\text{p. m.}}(S, \mathbf{K})$. On appelle* ***valeur moyenne*** *de f sur S le scalaire $\frac{1}{\ell(S)} \int_S f$.*

Interprétation cinématique : lorsque f modélise une vitesse, la valeur moyenne de f sur un intervalle de temps modélise ce qu'on appelle usuellement la "vitesse moyenne".

Remarque. Lorsque f est en escalier, sa valeur moyenne est un barycentre des valeurs qu'elle prend. En particulier, si f vaut constamment un scalaire λ, alors sa valeur moyenne vaut λ.

Question. Soit $f \in C^0_{\text{p. m.}}(S, \mathbf{K})$. La croissance de $\int_S$ permet d'affirmer l'implication $f \geq 0 \Longrightarrow \int_S f \geq 0$. Que dire du cas d'égalité ? Est-ce que, lorsque $\left\{\begin{array}{c} \int_S f = 0 \\ f \geq 0 \end{array}\right.$, on a $f = 0$? La réponse est NON : prendre une fonction nulle sur S sauf en un point où elle vaut 42. Cependant, les discontinuités constituent les seules obstructions à une réponse positive.

Proposition. *Supposons S infini. Alors toute fonction continue, de signe constant et d'intégrale nulle sur S est nécessairement nulle.*

Application. *Supposons S infini. Soient $n \in \mathbf{N}$ et $f \in C^0(S, \mathbf{K})$ tels que $\forall k \in \{0, 1, ..., n\}, \int_S f(t)\, t^k = 0$. Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois.*

La fonction $\varphi \mapsto \int_S \varphi(t)\, t^k$ étant linéaire et nulle sur la partie $\left\{1, \mathrm{Id}, \mathrm{Id}^2, ..., \mathrm{Id}^n\right\}$, elle est nulle sur le sous-espace vectoriel engendré par cette partie, à savoir sur $\mathbf{R}_n[X]$, d'où la nullité de l'intégrale $\int_S f(t) \prod_{i=1}^m (t - s_i)\, dt$ pour tout entier naturel $m \leq n$ et pour toute famille $(s_i) \in S^m$.

Supposons par l'absurde que f s'annule au plus n fois. Notons $s_1, s_2, ..., s_m$ les points où f change de signe (f s'annulant en un tel point, on a $m \leq n$). Alors la fonction $t \mapsto \prod_{i=1}^m (t - s_i)$ change de signe aux mêmes points que f, donc leur produit $t \mapsto f(t) \prod_{i=1}^m (t - s_i)$ garde un signe constant sur S ; puisqu'il est continu et d'intégrale nulle (et que S est infini), il doit être nul, en particulier en tout point de $\underbrace{S \setminus \{s_1, s_2, ..., s_m\}}_{\text{infini car } S \text{ est infini}}$, ce qui montre que f s'annule une infinité de fois : contradiction.

2 Intégration et dérivation

2.1 Théorème fondamental de l'analyse

L'addition et la soustraction sont deux opérations "duales", en cela qu'additionner un nombre donné et soustraire ce même nombre sont deux opérations réciproques de l'autre. De même, les opérateurs "somme" $\Sigma : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \\ a & \longmapsto & \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \end{array}\right.$ et "différence" $\Delta : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow & \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \\ a & \longmapsto & (a_n - a_{n-1}) \end{array}\right.$ vérifient pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ et pour toute suite $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ les égalités

$$[\Sigma(\Delta(u))]_n = u_n \quad \text{et} \quad [\Delta(\Sigma(u))]_n = u_n - u_0,$$

ce qui montre en quoi ces opérateur sont "duaux". La dérivation n'étant autre qu'une différenciation infinitésimale et l'intégration qu'une sommation infinitésimale, il n'est pas surprenant que dérivation et intégration possèdent une certaine "dualité".

Heuristique. Donnons-nous une fonction continue $f : S \longrightarrow \mathbf{R}_+$ et fixons un point $a \in S$. [dessin] Imaginons un tapis que l'on déroulerait à partir de a dans la direction des abscisses croissantes et qui, pour tout $t \in S$, recouvrirait exactement l'aire $\mathcal{A}(t) := \int_a^t f$ lorsque la base du tapis recouvre $[a,t]$. Comment mesurer la variation de l'aire du tapis en fonction de l'abscisse ? Plaçons-nous en une abscisse t. Lorsque t varie d'un tout petit Δt, la valeur de fonction f (qui est continue en t) varie très peu autour de $f(t)$, donc l'aire supplémentaire vaut environ celle du rectangle de base Δt et de hauteur $f(t)$, ce qui s'écrit $\Delta\mathcal{A}(t) \simeq f(t)\,\Delta t$, d'où le taux d'accroissement $\frac{\Delta\mathcal{A}(t)}{\Delta t} \simeq f(t)$, approximation d'autant meilleure que Δt est petit et qui devient égalité $\frac{d\mathcal{A}(t)}{dt} = f(t)$ lorsque Δt tend vers 0. Cela éclaire le théorème suivant qui ramènera (en corollaire) le calcul d'intégrales à celui de primitives.

Théorème (fondamental de l'analyse). *Soient $f \in C^0(S, \mathbf{K})$ et $(a,t) \in S^2$. On a alors l'égalité*

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_a^t f = f(t).$$

★ Cela est faux si f est supposée continue seulement par morceaux. Pour s'en souvenir, observer dans l'heuristique ci-dessus que l'approximation $f(t+\Delta t) \simeq f(t)$ devient fausse si t est un point de discontinuité de f.

Corollaire (calcul intégral et primitives). *Soient $f \in C^0(S, \mathbf{K})$ et $(a,b) \in S^2$. On a alors l'égalité*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \text{ pour tout primitive } F \text{ de } f.$$

Démonstration. Les fonctions $t \mapsto \int_a^t f$ et $F - F(a)$ sont dérivables, ont même dérivée (f) et coïncident en un point (a), donc sont égales partout, en particulier en b.

Notation. La différence $F(b) - F(a)$ est également notée à l'aide de crochets et d'un symbole muet :

$$[F(x)]_{x=a}^b := [F(x)]_a^b := [F]_a^b := F(b) - F(a).$$

Remarque. Les théorème et corollaire ci-dessus sont les analogues "continus" des égalités "discrètes" $[\Sigma(\Delta(u))]_n = u_n$ et $[\Delta(\Sigma(u))]_n = u_n - u_0$.

Exemple. *Soit $n \in \mathbf{Z}$. Montrer l'égalité $\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\frac{dt}{2\pi} = \delta_n^0$.*

Si $n = 0$, on a $\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\frac{dt}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt = \frac{1}{2\pi}[t]_{t=-\pi}^{\pi} = 1$. Sinon, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\frac{dt}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{int}}{in}\right]_{t=-\pi}^{\pi} = \frac{e^{in\pi} - e^{-in\pi}}{2ni\pi} = \frac{(-1)^n - (-1)^{-n}}{2ni\pi} \underset{\text{même parité}}{\overset{\text{car } n \text{ et } -n \text{ ont}}{=}} 0.$$

Suite de l'exemple. *Soient $n \in \mathbf{N}$ et $P \in \mathbf{K}_n[X]$, mettons $P =: \sum_{i=0}^n a_i X^i$. Montrer que*

$$\forall d \in \{0,1,...,n\},\ a_d = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{P(e^{i\theta})}{e^{di\theta}}\frac{dt}{2\pi}.$$

Soit $d \in [0,n]$ entier. On a alors

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{P(e^{i\theta})}{e^{di\theta}}\frac{dt}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=0}^n a_k e^{ki\theta}\right)e^{-di\theta}\frac{dt}{2\pi} \underset{\text{l'intégration}}{\overset{\text{linéarité de}}{=}} \sum_{k=0}^n a_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{(k-d)i\theta}\frac{dt}{2\pi}}_{=\delta_{k-d}^0 = \delta_k^d} = a_d.$$

Application de l'exemple. *Soient $n \in \mathbf{N}$ et $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbf{C}^n$. Montrer qu'il y a un point du cercle unité dont le produit des distances aux λ_i est plus grand que 1.*

Posons $P := \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$. On veut trouver un complexe unitaire u tel que $|P(u)| \geq 1$, ce qui revient à montrer la comparaison $M := \max_{z\in\mathbf{U}} |P(z)| \geq 1$ (on admet pour l'instant que le maximum fait sens). Or le coefficient dominant de P vaut d'une part 1, d'autre part $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{P(e^{i\theta})}{e^{ni\theta}}\frac{dt}{2\pi}$, d'où l'on tire les comparaisons

$$1 = |1| = \left|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{P(e^{i\theta})}{e^{ni\theta}}\frac{dt}{2\pi}\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\left|P\left(\underbrace{e^{i\theta}}_{\in\mathbf{U}}\right)\right|}_{\leq M}\underbrace{\left|\frac{1}{e^{ni\theta}}\right|}_{=1}\frac{dt}{2\pi} \leq \frac{M}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt = M, \text{ c. q. f. d..}$$

Montrons enfin que M fait sens. Les ensembles $\{|P(u)|\ ;\ u \in \mathbf{U}\}$ et $\left\{\left|P\left(e^{it}\right)\right|\ ;\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$ étant égaux par surjectivité de l'application $\left\{\begin{array}{ccc}\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbf{U} \\ t & \longmapsto & e^{it}\end{array}\right.$, M fait sens ssi l'ensemble $\left\{\left|P\left(e^{it}\right)\right|\ ;\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$ admet un maximum, *i. e.* ssi la fonction $\left\{\begin{array}{ccc}\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \left|P\left(e^{it}\right)\right|\end{array}\right.$ atteint son *supremum* ; or cette fonction est continue sur un segment, ce qui conclut.

2.2 Reparamétrage

Heuristique. Reprenons notre heuristique du tapis mais déroulons cette fois le tapis selon une abscisse non uniforme φ, notre intégrande f étant alors continue sur un segment $[\varphi(a), \varphi(b)]$ (dans l'heuristique précédente, on avait $\varphi = \mathrm{Id}$). Lorsque t parcourt $[a, b]$, l'argument de f parcourt $[\varphi(a), \varphi(b)]$: il est alors raisonnable d'espérer que l'aire intégrale $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f$ recouverte par le tapis vaille $\int_a^b f(\varphi(t))\, dt$. Cependant, si l'on imagine à présent que notre tapis reste enroulé tout en "marquant" de peinture le domaine sous le graphe de f, l'intégrale $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f$ devenant alors la "quantité" de peinture utilisée, il est clair que le domaine sera d'autant moins "imprimé" que le tapis roulera vite. Il faudra donc pondérer l'aire marquée entre une abscisse $\varphi(t)$ et $\varphi(t) + \Delta t$ par la vitesse du rouleau en $\varphi(t)$, à savoir $\varphi'(t)$, afin que l'intégrale $\int_a^b f(\varphi(t))\, dt$ soit aussi "chargée de peinture" que l'intégrale $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f$. Cela éclaire le théorème suivant.

Proposition (reparamétrage). *Soient $(a, b) \in \mathbf{R}$, $\varphi \in C^1([a, b], \mathbf{C})$ et $f \in C^0_{\text{p. m.}}([\varphi(a), \varphi(b)], \mathbf{K})$ telles que $f \circ \varphi$ soit définie sur $[a, b]$. On a alors l'égalité*

$$\int_a^b (f \circ \varphi) \times \varphi' = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f.$$

MNEMO 1 : toutes les hypothèses ne font qu'assurer que les intégrandes sont continues par morceaux sur leurs segments d'intégration.

MNEMO 2 : avec la très pratique notation $d(\sigma(t)) := \sigma'(t)\, dt$ pour tout fonction σ dérivable, on peut écrire les égalités

$$\int_a^b (f \circ \varphi) \times \varphi' = \int_a^b f(\varphi(t)) \frac{d\varphi(t)}{dt} dt = \int_{t=a}^b f\left(\boxed{\varphi(t)}\right) d\boxed{\varphi(t)} = \int_{u=\boxed{\varphi(a)}}^{\boxed{\varphi(b)}} f(u)\, du = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f.$$

Exemple 1 (reparamétrage affine). Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^* \times \mathbf{K}$. On a

$$\int_a^b f(\lambda t + \mu)\, dt = \int_{t=a}^b f(\lambda t + \mu) \frac{d(\lambda t + \mu)}{\lambda} \overset{u := \lambda t + \mu}{=} \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda a + \mu}^{\lambda b + \mu} f(u)\, du.$$

Exemple 2. *Calculer l'aire du demi-disque unité.* On veut la valeur de

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx \underset{x = \cos x}{\overset{\theta := \arccos x}{=}} & \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1 - \cos^2 \theta}\, (-\sin \theta)\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\ = & \left[\frac{\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}}{2}\right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{0}{2}\right) - \left(0 - \frac{0}{2}\right)}{2} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Exemple 2 bis. Pour calculer l'intégrale $I := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta$ ci-dessus, on aurait pu la reparamétrer selon $\psi := \frac{\pi}{2} - \theta$, ce qui aurait donné

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{2} - 0}^{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)(-d\psi) = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 \psi\ d\psi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \\ &= \frac{\pi}{2} - I, \text{ d'où l'on aurait tiré } I = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Exemple 3. *Calculer* $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{x^2+x+1}$. On a les égalités

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{0} \frac{dx}{x^2+x+1} &= \int_{-2}^{0} \frac{d\boxed{x+\frac{1}{2}}}{\boxed{x+\frac{1}{2}}^2+\frac{3}{4}} \overset{y:=x+\frac{1}{2}}{=} \int_{\boxed{-2+\frac{1}{2}}}^{\boxed{0+\frac{1}{2}}} \frac{dy}{y^2+\frac{3}{4}} = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{\frac{3}{4}\left(\left(\frac{2y}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)} \\
&\overset{z=\frac{2y}{\sqrt{3}}}{=} \int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{3}{2}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{2}} \frac{dz\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{4}\left(z^2+1\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dz}{z^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan z\right]_{z=-\sqrt{3}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Exemple 4. *Soit* $P \in \mathbf{R}[X]$. *Montrer que* $\int_0^{\pi} P\left(e^{it}\right) e^{it} dt$ *est imaginaire pur.*

On a les égalités et appartenance $\int_0^{\pi} P\left(e^{it}\right) e^{it} dt \overset{u:=e^{it}}{=} \int_{e^{i0}}^{e^{i\pi}} P(u) \frac{du}{i} = -i \int_1^{-1} P = i \int_{-1}^{1} P \in i\mathbf{R}$.

2.3 Intégration par parties

La règle de Leibniz permet de dériver un produit. En intégrant l'égalité obtenue, on aboutit à la proposition suivante.

Proposition (intégration par parties). *Soient* $(a,b) \in \mathbf{R}$, $f \in C^1([a,b], \mathbf{K})$ *et* $g \in C^0([a,b], \mathbf{K})$. *On a alors l'égalité*

$$\int_a^b fg = [fG]_a^b - \int_a^b f'G \text{ pour tout primitive } G \text{ de } g.$$

En pratique. On pourra représenter cela par le dessin

$$\left\downarrow \begin{array}{ccc} f & & g \\ & \diagdown^{+} & \\ f' & \cdots^{-} & G \end{array} \right\uparrow \quad \text{ou} \quad \left\downarrow \begin{array}{ccc} f(t) & & g(t)\,dt \\ & \diagdown^{+} & \\ f'(t)\,dt & \cdots^{-} & G(t) \end{array} \right\uparrow$$

où les flèches indiquent le sens de dérivation, les pointillés que l'on prend l'intégrale du produit et les barres obliques que l'on prend le crochet du produit. Cela permet éventuellement de représenter plusieurs IPP à la suite (attention aux signes qui s'alternent) :

$$\left\downarrow \begin{array}{ccc} f & & \varphi''' \\ & \diagdown^{+} & \\ f' & & \varphi'' \\ & \diagdown^{-} & \\ f'' & & \varphi' \\ & \diagdown^{+} & \\ f''' & \cdots^{-} & \varphi \end{array} \right\uparrow \text{ traduit } \begin{array}{c} \int_S f\varphi''' = [f\varphi'']_S - [f'\varphi']_S + [f''\varphi]_S - \int_S f'''\varphi \\ \text{pour tout } (f,\varphi) \in C^3(S,\mathbf{K})^2. \end{array}$$

★ Cette présentation n'a rien de conventionnelle, si vous l'utilisez autre part que sur votre brouillon, il faut absolument, en plus d'*annoncer que vous effectuez une intégration par parties*, au minimum rappeler que

"*les flèches indiquent le sens de dérivation*".

Exemple 1. *Calculer* $\int_1^e \ln$. Une IPP $\left\downarrow \begin{array}{ccc} \ln t & & dt \\ & \diagdown^{+} & \\ \frac{dt}{t} & \cdots^{-} & t \end{array} \right\uparrow$ donne

$$\int_1^e \ln t \; dt = [t \ln t]_{t=1}^{e} - \int_1^e \frac{dt}{t} t = (e-0) - (e-1) = 1.$$

Exemple 2. *Calculer l'aire du quart de disque unité.* On veut la valeur de $I := \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$. Une

$$\text{IPP}\left\downarrow\begin{array}{ccc} \sqrt{1-x^2} & & dx \\ & \searrow^{+} & \\ \frac{-x\ dx}{\sqrt{1-x^2}} & \cdots^{-} & x \end{array}\right\uparrow \text{ donne les égalités}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \left[x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^2\ dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= (0-0) + \int_0^1 \frac{1-\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \\ &= [\arcsin]_0^1 - I, \text{ d'où } I = \frac{\arcsin 1}{2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Exemple 3. *Soit $f \in C^1(S, \mathbf{K})$. Montrer que $\int_S f(t)\, e^{int}dt \longrightarrow 0$.* Posons $S =: [a, b]$. Une IPP

$$\left\downarrow\begin{array}{ccc} f(t) & & e^{int}dt \\ & \searrow^{+} & \\ f'(t)\, dt & \cdots^{-} & \frac{e^{int}}{in} \end{array}\right\uparrow \text{ donne}$$

$$\int_S f(t)\, e^{int}dt = \left[\frac{f(t)\, e^{int}}{in}\right]_{t=a}^{b} - \int_a^b \frac{f'(t)}{in}e^{int}dt = \frac{1}{n}\left[f(t)\, \frac{e^{int}}{i}\right]_{t=a}^{b} - \frac{1}{n}\int_a^b f(t)\, \frac{e^{int}}{i}dt.$$

Or f est continue sur le segment S, donc y est bornée, tout comme $t \mapsto \frac{e^{int}}{i}$, donc le crochet est borné ; puisque $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$, le premier terme tend vers 0. Quant au second, on montrerait de même que l'intégrande est bornée (puisque f' est continue) (mettons par un M), donc l'intégrale est borné par $(b-a)\, M$, donc le second terme tend aussi vers 0.