Matrices

(résumé)

Théorème fondamental (représentation matricielle des applications linéaires)

$$\left\{\begin{array}{ccc} L(E,F) & \xrightarrow{\sim} & M_{q,p}(\mathbf{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\, f \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{ccc} L(E) & \xrightarrow{\sim} & M_p(\mathbf{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, f \end{array}\right. \quad \text{sont} \quad \begin{array}{c} \textit{des isomorphismes} \\ \textit{d'espaces vectoriels} \end{array}.$$

★ L'ordre dans (E,F) ou $(\mathcal{B},\mathcal{C})$ est renversé en (q,p).

★★★★★ Toujours penser "ligne" PUIS "colonne" ★★★★★

Les matrices élémententaires $E_{i,j}$ constituent la ***base canonique*** de chacun des $\left\{\begin{array}{l} M_{p,q}(\mathbf{K}) := \mathbf{K}^{\{1,\dots,p\}\times\{1,\dots,q\}} \\ M_n(\mathbf{K}) := \mathbf{K}^{\{1,\dots,n\}^2} \end{array}\right.$.

$A = \sum_{i,j} [A]_{i,j} E_{i,j}$ $\qquad \dim M_{p,q}(\mathbf{K}) = pq$ $\qquad \dim M_n(\mathbf{K}) = n^2$.

Produit $\qquad [AB]_{i,j} = \sum_{\blacklozenge} a_{i,\blacklozenge} b_{\blacklozenge,j}$ $\qquad$ Les tailles se comportent comme Chasles : $(p,\boxed{q}),(\boxed{q},r) \longrightarrow (p,r)$.
$\times$ est associative, compatible avec $\cdot$, distributive sur $+$, admet des neutres I_n (matrices ***identité***).
★ En général, $\times$ n'est NI commutative NI intègre :

$$\begin{pmatrix} \circ & 1 \\ \circ & \circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix} = 0 \neq \begin{pmatrix} \circ & 1 \\ \circ & \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \circ & 1 \\ \circ & \circ \end{pmatrix}.$$

L'isomorphisme $\left\{\begin{array}{ccc} M_{p,q}(\mathbf{K}) & \xrightarrow{\sim} & L(\mathbf{K}^q,\mathbf{K}^p) \\ A & \longmapsto & X \mapsto AX \end{array}\right.$ identifie une matrice avec son $\left\{\begin{array}{c} \textbf{\textit{application linéaire}} \\ \textbf{\textit{canoniquement associée}} \end{array}\right.$.

L'isomorphisme $\left\{\begin{array}{ccc} M_n(\mathbf{K}) & \xrightarrow{\sim} & L(\mathbf{K}^n) \\ A & \longmapsto & X \mapsto AX \end{array}\right.$ identifie une matrice carré avec son $\left\{\begin{array}{c} \textbf{\textit{endomorphisme}} \\ \textbf{\textit{canoniquement associé}} \end{array}\right.$.

Transposition. $\qquad [{}^tA]_{i,j} := [A]_{j,i}$ $\qquad {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.
La transposition est une symétrie linéaire de $M_n(\mathbf{K}) = S_n(\mathbf{K}) \oplus AS_n(\mathbf{K})$.

Matrices :

1. d'un *vecteur* dans une base : colonne des coordonnées $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, x$;
2. d'une *famille de vecteurs* dans une base : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_\ell) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, x_1,\dots,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, x_\ell)$;
3. d'un *endo* dans une base : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, f := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, f(\mathcal{B})$;
4. d'une *AL* dans un couple de bases (une au départ, une à l'arrivée) : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\, f := \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\, f(\mathcal{B})$;
5. de *passage* d'une base à/vers une autre : $\mathrm{Pass}(\mathcal{B},\mathcal{B}') := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, \mathcal{B}'$.

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\, f(x) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\, f)(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, x)$ $\qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}\, g)(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},C}\, f)$.

★ Pour les Mat, l'ordre des bases NE se comporte PAS DU TOUT comme Chasles ! $\left\{\begin{array}{c} \text{Regarder les TAILLES} \\ \text{élimine les erreurs.} \end{array}\right.$

$\mathrm{Pass}(\mathcal{B},\mathcal{B}')^{-1} = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}',\mathcal{B})$ $\qquad \mathrm{Pass}(\mathcal{B},\mathcal{B}'') = \mathrm{Pass}(\mathcal{B},\mathcal{B}')\,\mathrm{Pass}(\mathcal{B}',\mathcal{B}'')$.

★★★ **Changement de base** pour la matrice

1. d'un vecteur : $X' = P^{-1}X$;
2. d'un endomorphisme $A' = P^{-1}AP$;
3. d'une application linéaire $A' = Q^{-1}AP$.

$\mathrm{rg}\, A =$ rang des vecteurs lignes de $A =$ rang des vecteurs colonnes de $A = \mathrm{rg}\, f$ si $\left\{\begin{array}{c} \exists (\mathcal{B},\mathcal{C}), \\ A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\, f \end{array}\right.$.

$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} \neq 0 & ? \\ 0 & A \end{pmatrix} = 1 + \mathrm{rg}\, A$. $\qquad \mathrm{rg}\, A$ inchangé par permutation de rangée, dilatation ou transvection.
Le "nombre de paramètres" d'un système linéaire $AX = Y_0$ est le nombre d'inconnues moins $\mathrm{rg}\, A$.

Pivot de Gauss. $\qquad A \in GL_n \Longrightarrow A$ vaut I_n à des transvections/dilatations sur ses LIGNES près.
Pour inverser une matrice $A \in GL_n$, effectuer les opérations du pivot de Gauss de A sur la matrice I_n.