Matrices

lundi 15, mercredi 17 avril, lundi 13, mardi 14 mai

Table des matières

Dans tout le chapitre, la lettre $\mathbf{K}$ désignera l'un des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et n dénotera un entier naturel non nul.

On fixe deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels E et F chacun de dimension finie et on note $\binom{p}{q} := \binom{\dim E}{\dim F}$.

On fixe une base $(e_1, e_2, ..., e_p)$ de E et une base $(f_1, f_2, ..., f_q)$ de F.

On rappelle enfin la définition des ***symboles de Kronecker*** : pour tous symboles S et Σ, on définit un entier $\delta_{S,\Sigma}$ ou δ_Σ^S par

$$\delta_S^\Sigma := \begin{cases} 0 \text{ si } S \neq \Sigma \\ 1 \text{ si } S = \Sigma \end{cases}.$$

1 L'espace $M_{p,q}(\mathbf{K})$

Les bijections $\left\{ \begin{array}{ccc} L(E,F) & \longrightarrow & F^p \\ f & \longmapsto & (f(e_i)) \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbf{K}^q \\ \sum_{j=1}^q \lambda_j f_j & \longmapsto & (\lambda_j) \end{array} \right.$ montrent que la connaissance d'un $f \in L(E,F)$ donné revient à celle, pour tout $i \in \{1, 2, ..., p\}$, des q coordonnées de $f(e_i)$. On peut écrire ces pq scalaires sous forme d'un tableau à q lignes et p colonnes : connaître f revient alors exactement à connaître ce tableau, qualifiée de matrice (ce qui engendre).

Définition (matrices). *On appelle **matrices** à p lignes et q colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$ toute application de $\{1, 2, ..., p\} \times \{1, 2, ..., q\}$ vers $\mathbf{K}$. Leur ensemble est noté*

$$M_{p,q}(\mathbf{K}) := \mathbf{K}^{\{1,2,...,p\} \times \{1,2,...,q\}}.$$

*La **taille** d'une matrice de $M_{p,q}(\mathbf{K})$ est le couple (p,q) et l'on dira abusivement qu'une telle matrice est de taille $p \times q$.*

*Si $p = n = q$, une matrice de $M_{n,n}(\mathbf{K})$ est dite **carrée** (et, abusivement, de taille n), leur l'ensemble est noté*

$$M_n(\mathbf{K}) := M_{n,n}(\mathbf{K}) = \mathbf{K}^{\{1,2,...,n\}^2}.$$

*Si $p = 1$, un élément de de $M_{1,q}(\mathbf{K})$ est appelé une **matrice-ligne**.*

*Si $q = 1$, un élément de de $M_{p,1}(\mathbf{K})$ est appelé une **matrice-colonne**.*

★★★★★ Toujours penser "ligne" PUIS "colonne" ★★★★★ (pour ne pas de mélanger les pinceaux).

Convention. De la même manière que l'on a toujours écrit les couples indifféremment en ligne ou en colonne, il est usuel d'identifier les trois ensembles $M_{n,1}(\mathbf{K})$, $M_{1,n}(\mathbf{K})$ et $\mathbf{K}^n$.

Définition (coefficients). *Soient $A \in M_{p,q}(\mathbf{K})$ et $(i,j) \in \{1,2,...,p\} \times \{1,2,...,q\}$. On appelle **coefficient** d'indice (i,j) de la matrice A l'image du couple (i,j) par l'application A.*

Convention. Lorsqu'une lettre majuscule dénote une matrice, il est usuel de dénoter ses coefficients avec la lettre minuscule associée. Ainsi pourra-t-on représenter une matrice M de taille $p \times q$ sous la forme d'un tableau rectangulaire à p lignes et q colonnes :

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & \cdots & m_{1,q} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & \cdots & m_{2,q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{p,1} & m_{p,2} & m_{p,3} & \cdots & m_{p,q} \end{pmatrix} = M = (m_{i,j})_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le q}} .$$

Définition (matrices diagonales, triangulaires). *Soit $A \in M_n(\mathbf{K})$.*
*A est dite **diagonale** si $\forall (i,j) \in \{1,2,...,n\}^2$, $i \neq j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$.*
*A est dite **triangulaire supérieure** si $\forall (i,j) \in \{1,2,...,n\}^2$, $i > j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$.*
*A est dite **triangulaire inférieure** si $\forall (i,j) \in \{1,2,...,n\}^2$, $i < j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$.*
*A est dite **triangulaire supérieure stricte** si $\forall (i,j) \in \{1,2,...,n\}^2$, $i \geq j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$.*
*A est dite **triangulaire inférieure stricte** si $\forall (i,j) \in \{1,2,...,n\}^2$, $i \leq j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$.*

Définition (matrice élémentaire). *Soit $(i,j) \in \{1,2,...,p\} \times \{1,2,...,q\}$ On appelle **matrice élémentaire** d'indice (i,j) la matrice $E_{i,j}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i,j) qui vaut 1.*

Remarque (base canonique, dimension de $M_{p,q}$).
Soient (i,j) et (x,y) dans $\{1,2,...,p\} \times \{1,2,...,q\}$. Alors le coefficient de $E_{i,j}$ d'indice (x,y) vaut $\delta_i^x \delta_j^y$. On fera le parallèle avec le fait suivant : en notant (e_k) la base canonique de $\mathbf{K}^p$, la x-ième coordonnée de e_i vaut δ_i^x.

De la même manière qu'un vecteur $x = (x_1, x_2, ..., x_p)$ de $\mathbf{K}^p$ s'écrit $\sum_{i=1}^p x_i e_i$, on a pour tout matrice A l'égalité

$$A = \sum_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le q}} a_{i,j} E_{i,j},$$

ce qui montre que la famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le q}}$ engendre l'espace $M_{p,q}(\mathbf{K})$. Il serait par ailleurs aisé de montrer sa liberté (*cf.* exercices). Il s'agit donc d'une base de $M_{p,q}(\mathbf{K})$, appelée la ***base canonique*** de $M_{p,q}(\mathbf{K})$. On en déduit en particulier

$$\dim M_{p,q}(\mathbf{K}) = pq \qquad \text{et} \qquad \dim M_n(\mathbf{K}) = n^2.$$

Théorème fondamental (représentation matricielle des applications linéaires). *Les applications suivantes sont des isomorphismes d'espaces vectoriels :*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} M_{p,q}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & L(\mathbf{K}^q, \mathbf{K}^p) \\ (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le q}} & \longmapsto & (x_j)_{1 \le j \le q} \mapsto \left(\sum_{j=1}^q a_{i,j} x_j \right)_{1 \le i \le p} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ccc} M_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & L(\mathbf{K}^n) \\ (a_{i,j}) & \longmapsto & (x_j) \mapsto \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right) \end{array} \right. .$$

Nous avons déjà vu un exemple de cela (quand $(p,q) = (2,3)$) dans le cours sur la dimension finie Il suffit de reprendre la preuve telle quelle et de s'entraîner à utiliser les signes de sommation.

Nous savons que $L(\mathbf{K}^n)$ est muni d'une multiplication (la composition). Nous allons maintenant définir une multiplication entre matrices afin que l'isomorphisme ci-dessus préserve le produit (*exercice* : montrer qu'il y a au plus une façon de le faire).

Définition (produit matriciel). *Soient $r \in \mathbf{N}$, $U \in M_{p,q}(\mathbf{K})$ et $V \in M_{q,r}(\mathbf{K})$. On appelle **produit** de U par V, noté $U \times V$ ou UV, l'image du couple (U, V) par l'application*

$$\begin{cases} M_{p,q}(\mathbf{K}) \times M_{q,r}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & M_{p,r}(\mathbf{K}) \\ ((a_{i,j}), (b_{j,k})) & \longmapsto & \left(\sum_{\sharp=1}^{q} a_{i,\sharp} b_{\sharp,j}\right) \end{cases}$$

MNÉMO Les tailles se comportant comme Chasles : $(p, \underline{q}), (\underline{q}, r) \longrightarrow (p, r)$. Pour écrire le coefficient d'indice (i, j) de AB, écrire $a_{i,\square} b_{\square,j}$, remplir les deux espaces $\square$ par un même symbole muet puis sommer sur toutes les valeurs possibles de ce symbole.

Présentation : [dessin $\begin{array}{ccc} \times & \longrightarrow & \\ \uparrow & = & V \\ U & & UV \end{array}$ qui fait parler la somme $\sum_{x=1}^{q} a_{i,x} b_{x,j}$]

Remarque - convention (coefficients nuls). Les coefficients nuls n'interviennent pas dans le calcul du produit (ni dans les combinaisons linéaires). Il est par conséquent peu important de tous les marquer tous (nous les écrirons souvent en petit : $\circ$) et l'on conviendra que

une absence de coefficients tient rôle de nullité

(de la même manière que le polynôme $5X^2 - 1$ s'écrit rarement $0X^4 + 0X^3 + 5X^2 + 0X - 1$). On prendra cependant garde à conserver les *espaces* (tenant lieu de zéros) afin que la "structure" de la matrice reste claire.

Écriture ($\ddots$ ou $\diagdown$). Des points de suspension indiquent au lecteur une façon "évidente" de remplir les coefficients. Dans le cas particulier de coefficients *tous identiques*, on préférera un trait droit. Par exemple,

$$\text{l'écriture } \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \diagdown & \\ & & 1 \end{pmatrix} \text{ signifiera } \begin{pmatrix} 1 & \circ & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & 1 & \circ & & \vdots \\ \circ & \circ & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \circ \\ \circ & \cdots & \cdots & \circ & 1 \end{pmatrix}$$

(la matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux diagonaux qui valent tous 1).

Exemples : (tous les symboles non définis sont des scalaires invoqués)

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \circ & 1 & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \circ \\ 1 & \circ \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & \circ \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} \circ & 1 \\ \circ & \circ \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix} = 0$ (la matrice nulle) ;
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (multiplier $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \end{pmatrix}$ ne change rien) ;
4. $\begin{pmatrix} 7 & \circ & 1 & 2 \\ 1 & \circ & \circ & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ \\ -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;
5. $\begin{pmatrix} \circ & 1 & 1 \\ \circ & \circ & 1 \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \circ & 1 & 1 \\ \circ & \circ & 1 \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ & 1 & 1 \\ \circ & \circ & 1 \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \circ & 1 & 1 \\ \circ & \circ & 1 \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ & \circ & 1 \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} = 0$;
6. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 18 & \circ & \circ \\ \circ & 42 & \circ \\ \circ & \circ & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18a & 18b & 18c \\ 42d & 42e & 42f \\ -7g & -7h & -7i \end{pmatrix}$;
8. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 & \circ & \circ \\ \circ & 42 & \circ \\ \circ & \circ & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18a & 42b & -7c \\ 18d & 42e & -7f \\ 18g & 42h & -7i \end{pmatrix}$;

9. en notant une matrice de $M_{p,q}(\mathbf{K})$ comme la succession $(C_1, C_2, ..., C_q)$ de ses colonnes, on a (pour tout entier $j \in [1, q]$) l'égalité
$$(C_1, C_2, ..., C_q) \times e_j = C_j$$
où (e_k) est la base canonique de $\mathbf{K}^q$ (ces e_k doivent être écrit en *colonne* pour que le produit matriciel fasse sens) ;

10. $\begin{pmatrix} \circ & 1 & & \\ & \diagdown & \diagdown & \\ & & \diagdown & 1 \\ & & & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \\ \circ \end{pmatrix}$ (agit comme un "tapis-roulant" vers le haut) ;

11. $\begin{pmatrix} \circ & & & \\ 1 & \diagdown & & \\ & \diagdown & \diagdown & \\ & & 1 & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$ (agit comme un "tapis-roulant" vers le bas) ;

12. $\begin{pmatrix} & & 1 \\ & \diagup & \\ 1 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix}$ (renverse l'ordre des coordonnées).

Commentaires - définition (action des matrices diagonales, matrices identités). Soit A une matrice carrée de taille n. Il semblerait sur les les exemples 7 et 8 que

1. multiplier A à *gauche* par une matrice diagonale D multiplie les *lignes* de A chacune par le coefficient associé de D ;
2. multiplier A à *droite* par une matrice diagonale D multiplie les *colonnes* de A chacune par le coefficient associé de D.

Dans le cas où tous les coefficients diagonaux de D sont égaux, mettons à un scalaire λ, la multiplication de A par $\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \diagdown & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$ donne dans les deux cas λA. Lorsque $\lambda = 1$, on obtient ainsi un neutre pour la multiplication matricielle dans $M_n(\mathbf{K})$, appelée ***matrice identité*** (de taille n) et notée
$$I_n := \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \diagdown & \\ & & 1 \end{pmatrix}}_{n \text{ symboles } 1}.$$

Propriétés. *La multiplication matricielle est associative, compatible avec la multiplication externe et distributive sur l'addition.*

★★★ Elle n'est ni commutative (*cf.* exemples 7 et 8), ni intègre (*cf.* exemples 2 et 5).

On pourra donc faire du calcul comme d'habitude en faisant attention : d'une part à l'*ordre dans un produit*, d'autre part à *ne pas simplifier* sans avoir prouvé une inversibilité (*exercice* : montrer que les simplifiables sont précisément les inversibles).

Définition. *On appelle* ***groupe linéaire*** *(de taille n à coefficients dans $\mathbf{K}$) l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbf{K})$. On le note $GL_n(\mathbf{K})$.*

Remarque. Il s'agit de l'image réciproque du groupe linéaire $GL(\mathbf{K}^n)$ vu comme partie de $L(\mathbf{K}^n)$ par l'isomorphisme $M_n(\mathbf{K}) \longrightarrow L(\mathbf{K}^n)$ vu plus haut.

À l'aide du produit matriciel, les isomorphismes vus plus haut se réécrivent de manière plus succincte :
$$\left\{ \begin{array}{ccc} M_{p,q}(\mathbf{K}) & \longrightarrow & L(\mathbf{K}^q, \mathbf{K}^p) \\ A & \longmapsto & X \mapsto AX \end{array} \right. \quad et \quad \left\{ \begin{array}{ccc} M_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & L(\mathbf{K}^n) \\ A & \longmapsto & X \mapsto AX \end{array} \right. .$$

Définition (application linéaire canoniquement associée à une matrice). *Soit A une matrice dans $M_{p,q}(\mathbf{K})$ (resp. $M_n(\mathbf{K})$). L'application $X \mapsto AX$ est appelée l'**application linéaire** (resp. l'**endomorphisme**) **canoniquement associé(e)** à la matrice A.*

La diagonale d'une matrice joue un rôle analogue à celui de la première bissectrice dans le plan. Il est naturel d'étudier la réflexion par rapport à cette diagonale.

Définition (transposée, matrices symétrique et anti-symétriques). *Soit $A =: (a_{i,j}) \in M_{p,q}(\mathbf{K})$. On appelle **transposée** de A la matrice $(a_{j,i})$ de $M_{q,p}(\mathbf{K})$. On la note ${}^tA$ ou A^T.*

*On dit que A est **symétrique** si ${}^tA = A$, **anti-symétrique** si ${}^tA = -A$. On notera $S_n(\mathbf{K})$ et $AS_n(\mathbf{K})$ les ensembles des matrices respectivement symétriques et anti-symétriques de $M_n(\mathbf{K})$.*

Exemple. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Transposer revient à symétriser une matrice par rapport à sa diagonale.

Propriété (action de la transposition sur les combinaisons linéaires et les produits).

1. *La transposition est linéaire.*
2. *La transposition renverse l'ordre des produits au sens où, pour toutes matrices A et B telles le produit AB fasse sens, on a l'égalité*
$$ {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA. $$

Sanity check. Notons (p,q) et (q,r) les tailles respectives de A et B. Alors celles de ${}^tB$ et ${}^tA$ sont (r,q) et (q,p), donc le produit ${}^tB\,{}^tA$ est de taille $r \times p$, tout comme la transposée ${}^t(AB)$.

Corollaire. *Les espaces $S_n(\mathbf{K})$ et $AS_n(\mathbf{K})$ sont supplémentaires dans $M_n(\mathbf{K})$.*

Démonstration. La transposition $\tau : M \mapsto {}^tM$ est une symétrie linéaire de $M_n(\mathbf{K})$, ses points fixes sont les matrices symétriques, ses points "anti-fixés" sont les matrices anti-symétriques ; la décomposition $M_n(\mathbf{K}) = \operatorname{Ker}(\tau - \operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(\tau + \operatorname{Id})$ conclut.

2 Matrices et applications linéaires

Abrégeons $\mathcal{B} := (e_i)$ et $\mathcal{C} := (f_j)$ les bases de E et F invoquées en début de chapitre. Il arrivera de noter $f(\mathcal{B}) := (f(e_i))$ pour toute application f de source E.

Définitions (matrices d'un vecteur, d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire, d'un endomorphisme).

*Soit $x \in E$. On appelle **matrice** du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ la matrice colonne formée des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$. On la note $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} x$.*

*Soient $\ell \in \mathbf{N}$ et $(x_1, x_2, ..., x_\ell) \in E^\ell$. On appelle **matrice** de la famille (x_i) dans la base $\mathcal{B}$ la matrice de taille $p \times \ell$ formée des colonnes $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} x_1$, $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} x_2$, $...\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} x_\ell$. On la note $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, ..., x_\ell)$.*

*Soit $f \in L(E,F)$. On appelle **matrice** de l'application linéaire f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ respectivement la matrice de la famille $(f(e_i))$ dans la base $\mathcal{C}$. On la note $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} f := \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}} f(\mathcal{B})$.*

*Soit $f \in L(E)$. On appelle **matrice** de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$ la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f := \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f(\mathcal{B}) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}} f$.*

Exemples.

Dans la base canonique de $\mathbf{K}^3$, le vecteur $(1+X)^3 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dans la base $\left(\frac{X^n}{n!}\right)_{0\leq n\leq 4}$ de $\mathbf{K}_4[X]$, la famille $\left((1+X)^3, \left(2+X^2\right)^2\right)$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 6 & 8 \\ 6 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}$ vu que l'on a

$$\begin{aligned} \text{d'une part } (1+X)^3 &= X^3+3X^2+3X+1 = 0\frac{X^4}{4!}+6\frac{X^3}{3!}+6\frac{X^2}{2!}+3\frac{X}{1!}+1\frac{X^0}{0!}, \\ \text{d'autre part } \left(2+X^2\right)^2 &= X^4+4X^2+4 = 24\frac{X^4}{4!}+0\frac{X^3}{3!}+8\frac{X^2}{2!}+0\frac{X^1}{1!}+4\frac{X^0}{0!}. \end{aligned}$$

L'endomorphisme "dérivation" de l'espace $\mathbf{K}_3[X]$ a pour matrice $\begin{pmatrix} \circ & 1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & 2 & \circ \\ \circ & \circ & \circ & 3 \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\left(1, X, X^2, X^3\right)$.

L'application linéaire $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{K}_3[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}_2[X] \\ P & \longmapsto & (X+1)P'' \end{array}\right.$ a, dans les bases canoniques de $\mathbf{K}_3[X]$ et $\mathbf{K}_2[X]$, pour matrice $\begin{pmatrix} \circ & \circ & 2 & \circ \\ \circ & \circ & 2 & 6 \\ \circ & \circ & \circ & 6 \end{pmatrix}$.

La proposition suivante montre, comme attendu, que composer des applications linéaires revient à multiplier des matrices.

Proposition (matrice d'une composée, d'une image). Soient G un **K**-espace vectoriel de dimension finie dont on note $\mathcal{D}$ une base

Soient $x \in E$ et $f \in L(E, F)$. On a alors

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}} f(x) = \left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} f\right)\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} x\right).$$

Soit $(f, g) \in L(E, F) \times L(F, G)$. On a alors

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = \left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}} g\right)\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},C} f\right).$$

★★★ l'ordre des bases NE se comporte PAS DU TOUT comme Chasles mais complètement À L'INVERSE !

Exemple.

Notons x le polynôme $(1+X)^3$ et posons $L : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{K}_3[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}_2[X] \\ P & \longmapsto & (X+1)P'' \end{array}\right.$. On se place dans les bases canoniques au départ comme à l'arrivée. On a alors

$$\operatorname{Mat} L(x) = \operatorname{Mat} L \operatorname{Mat} x = \begin{pmatrix} \circ & \circ & 2 & \circ \\ \circ & \circ & 2 & 6 \\ \circ & \circ & \circ & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix},$$

ce qui traduit l'égalité $L(x) = 6 + 12X + 12X^2$. **Sanity check** : on a bien

$$L(x) = (X+1)x'' = (X+1)\ 3 \cdot 2(1+X)^1 = 6(X+1)^2 = 6X^2 + 12X + 6.$$

Notons Δ la dérivation de $\mathbf{K}_3[X]$. On se place toujours dans les bases canoniques de $\mathbf{K}_3[X]$ et $\mathbf{K}_2[X]$. On a alors

$$\operatorname{Mat}(L \circ \Delta) = \operatorname{Mat} L \operatorname{Mat} \Delta = \begin{pmatrix} \circ & \circ & 2 & \circ \\ \circ & \circ & 2 & 6 \\ \circ & \circ & \circ & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \circ & 1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & 2 & \circ \\ \circ & \circ & \circ & 3 \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & 6 \\ \circ & \circ & \circ & 6 \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}.$$

Cette égalité matricielle dit que les vecteurs 1, X et X^2 sont annulés par $L\circ\Delta$ et que X^3 a pour image $6+6X$.
Sanity checks : on a bien

$$\begin{aligned}
[L\circ\Delta](1) &= L(\Delta(1)) = L(0) = 0,\\
[L\circ\Delta](X) &= L(\Delta(X)) = L(1) = 0,\\
[L\circ\Delta]\left(X^2\right) &= L\left(\Delta\left(X^2\right)\right) = L(2X) = 0 \text{ et}\\
[L\circ\Delta]\left(X^3\right) &= L\left(\Delta\left(X^3\right)\right) = L\left(3X^2\right) = 3L\left(X^2\right) = 3(1+X)\,2.
\end{aligned}$$

Le **théorème fondamental (représentation matricielle des applications linéaires)** peut alors se reformuler comme suit.

Les applications suivantes sont des isomorphismes d'espaces vectoriels :

$$\left\{\begin{array}{ccc} L(E,F) & \longrightarrow & M_{q,p}(\mathbf{K}) \\ f & \longmapsto & \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} f \end{array}\right. \quad \textit{et} \quad \left\{\begin{array}{ccc} L(E) & \longrightarrow & M_p(\mathbf{K}) \\ f & \longmapsto & \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f \end{array}\right. .$$

★★★ L'ordre dans (E,F) ou $(\mathcal{B},\mathcal{C})$ est renversé en (q,p).

Toutes les définitions de cette section dépendent d'une base (ou d'un couple de bases). Que se passe-il quand on change de bases ? Plus précisément, comment "passer" de la matrice d'un vecteur dans une base donnée à la matrice de ce même vecteur dans une *autre* base ? Les matrices de passages vont permettent de répondre facilement à cela.

Définition (matrice de passage). *Soit $\mathcal{B}'$ une base de E. On appelle* ***matrice de passage*** *de $\mathcal{B}$ vers (ou à) $\mathcal{B}'$ la matrice* $\operatorname{Pass}(\mathcal{B},\mathcal{B}') := \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'$.

Retenir que l'on exprime la *nouvelle* base (inconnue) dans l'*ancienne* (connue).

Exemple. Soient θ un réel, $\mathcal{B} =: (u,v)$ une base orthonormée directe de $\mathbf{R}^2$ et $\mathcal{B}'$ la base image de $\mathcal{B}$ par la rotation de centre 0 et d'angle θ. On a alors $\operatorname{Pass}(\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Remarque (passage de passage). ($\mathcal{B}'$ dénote toujours une base de E.) En observant l'égalité $\operatorname{Pass}(\mathcal{B},\mathcal{B}') = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \operatorname{Id}$ (★ l'ordre des bases est changé !) et en utilisant la formule donnant la matrice d'une composée, on obtient d'une part l'inversibilité de $\operatorname{Pass}(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ et l'égalité

$$\operatorname{Pass}(\mathcal{B},\mathcal{B}')^{-1} = \operatorname{Pass}(\mathcal{B}',\mathcal{B}),$$

d'autre part pour toute base $\mathcal{B}''$ de E l'égalité

$$\operatorname{Pass}(\mathcal{B},\mathcal{B}'') = \operatorname{Pass}(\mathcal{B},\mathcal{B}')\operatorname{Pass}(\mathcal{B}',\mathcal{B}'')$$

(cette fois l'ordre des bases est bien selon Chasles).

Proposition (changement de bases pour les vecteurs, pour les applications linéaires).

1. *Soient $x\in E$ et $\mathcal{B}'$ une base de E. Posons $P := \operatorname{Pass}(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ et $\left\{\begin{array}{l} X := \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} x \\ X' := \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'} x \end{array}\right.$. On a alors*
$$X' = P^{-1}X.$$
2. *Soient $f\in L(E,F)$, $\left\{\begin{array}{l} \mathcal{B}' \text{ une base de } E \\ \mathcal{C}' \text{ une base de } F \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{l} P := \operatorname{Pass}(\mathcal{B},\mathcal{B}') \\ Q := \operatorname{Pass}(\mathcal{C},\mathcal{C}') \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l} A := \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} f \\ A' := \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} f \end{array}\right.$. On a alors*
$$A' = Q^{-1}AP.$$

MNEMOs.

Pour ne pas confondre P et Q, préciser les tailles : à droite $\left(q,\underline{q}\right)\left(\underline{q},\overline{p}\right)\left(\overline{p},p\right)$, à gauche (q,p).

Pour savoir où mettre l'exposant -1, prendre $f = \operatorname{Id}$ et $\begin{pmatrix} \mathcal{C} \\ \mathcal{C}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}' \\ \mathcal{B} \end{pmatrix}$: tout s'écrit alors en terme de matrices de passages $\operatorname{Pass}(\mathcal{B},\mathcal{B}') = \operatorname{Pass}\left(\mathcal{B},\overline{\mathcal{B}'}\right)\operatorname{Pass}\left(\overline{\mathcal{B}'},\underline{\mathcal{B}}\right)\operatorname{Pass}\left(\underline{\mathcal{B}},\mathcal{B}'\right)$.

Autre idée : en posant $B := A'$, l'égalité ci-dessus se réécrit $AP = QB$, de sorte que l'on pourra retenir "*quand on est happé (AP) par la prépa, on va cuber (QB)*" (*i. e.* faire 5/2 dans le langage des khâgneux).

Cas particulier. Lorsque $E = F$ et $\begin{pmatrix} \mathcal{C} \\ \mathcal{C}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{B} \\ \mathcal{B}' \end{pmatrix}$, on obtient la formule de changement de base pour les *endomorphismes* :

$$A' = P^{-1}AP.$$

3 Rang et systèmes linéaires

Nous avons déjà vu à de nombreuses reprises une méthode pour résoudre un système linéaire (ou affine) :

1. invoquer un vecteur (disons x) contenant autant de coordonnées que le système possède d'inconnues et affirmer les équivalences "x est solution du système ssi..." ;
2. intuiter le nombre – appelons-le d – de "degrés de liberté" du système (souvent le nombre d'inconnues moins le nombre d'équations) et choisir d inconnues (que l'on appellera *paramètres*) ;
3. exprimer toutes les inconnues en fonction des paramètres (c'est la *résolution* proprement dite) ;
4. remplacer les expression trouvées dans le vecteur x invoqué au début et décrire x comme combinaison linéaire dont les coefficients sont les d paramètres choisis ;
5. faire disparaître les paramètres en introduisant un énoncé existentiel (avec d symboles muets) ;
6. conclure que l'ensemble des solutions est un Vect (éventuellement translaté dans le cas affine) de dimension d.

Deux points nécessitent un éclaircissement : le nombre de degrés de liberté, la résolution proprement dite. Le premier motive la définition suivante, le second l'algorithme dit du pivot de Gauss.

Définition – Propriétés. *Soit A une matrice de taille $p \times q$.*
*On appelle **rang** de A le rang de la famille de ses colonnes dans $\mathbf{K}^p$. Il se note $\operatorname{rg} A$ et vaut également le rang de la famille des colonnes de A dans $\mathbf{K}^q$, ce qui s'écrit $\operatorname{rg}({}^tA) = \operatorname{rg} A$.*
Le rang de la matrice A vaut celui de toute application linéaire dont une matrice est A.

Remarque. Le rang d'une matrice de taille $p \times q$ est inférieur au nombre de lignes et au nombre de colonnes :

$$\forall A \in M_{p,q}(\mathbf{K}), \ \operatorname{rg} A \leq \min\{p, q\}.$$

Proposition (calcul du rang). Le mot "rangée" désignera au choix "ligne" ou "colonne".

1. *Le rang est inchangé par :*
   (a) ***(permutation)*** *permutations de rangées ;*
   (b) ***(dilatation)*** *multiplication d'une rangée par un scalaire NON NUL ;*
   (c) ***(transvection)*** *ajout à une rangée d'un multiple scalaire d'une AUTRE rangée.*
2. *Si λ dénote un scalaire NON NUL, on a alors* $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} \lambda & ?_1 & ?_2 & \cdots & ?_q \\ 0 & & & & \\ | & & A & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} = \operatorname{rg} A$ *pour toute matrice $A \in M_{p,q}(\mathbf{K})$ et pour tous scalaires $?_1, ?_2, ..., ?_q$ (la grosse matrice est de taille $(p+1) \times (q+1)$).*

En pratique. Pour calculer le rang d'une matrice donnée, on cherchera par conséquent :

1. à annuler (par transvections) le plus de coefficients possible dans une rangée à choisir ;
2. à placer (par transposition ou permutations) la rangée quasi-vide en première colonne avec un coefficient non nul en première place (de préférence un 1 pour faciliter les calculs) ;

3. à appliquer le second point de la proposition ci-dessus pour récurrer.

Exemples.
On a les égalités

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \circ & 2 \\ 5 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1}{\overset{L_2 \longleftarrow L_2 - 5L_1}{=}} & \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \circ & 2 \\ \circ & -11 & 1 & -7 \\ \circ & -11 & 1 & -7 \end{pmatrix} && \left(\begin{array}{c}\text{on met des } \circ \text{ sur la} \\ \text{première colonne}\end{array}\right) \\
= \quad & 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -11 & 1 & -7 \\ -11 & 1 & -7 \end{pmatrix} && \left(\begin{array}{c}\text{on se ramène à une matrice} \\ \text{de taille strictement inférieure}\end{array}\right) \\
= \quad & 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -11 & 1 & -7 \end{pmatrix} && \left(\begin{array}{c}\text{répéter un vecteur ne} \\ \text{change pas le Vect}\end{array}\right) \\
= \quad & 2.
\end{aligned}$$

On a les égalités

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 & -3 & -4 \\ -6 & 2 & 4 & 1 & -5 \\ 4 & -4 & -2 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 2 & -7 & 4 \end{pmatrix} \overset{L_1 \longleftarrow -L_1}{=} & \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ -6 & 2 & 4 & 1 & -5 \\ 4 & -4 & -2 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 2 & -7 & 4 \end{pmatrix} && \left(\begin{array}{c}\text{on retire les signes } - \\ \text{pour faciliter les calculs}\end{array}\right) \\
\underset{\substack{L_3 \longleftarrow L_3 - 4L_1 \\ L_4 \longleftarrow L_4 - L_3}}{\overset{L_2 \longleftarrow L_2 + 6L_1}{=}} & \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ \circ & 26 & 10 & 19 & 19 \\ \circ & -20 & -6 & -8 & -20 \\ \circ & -6 & 1 & -10 & \circ \end{pmatrix} && \left(\begin{array}{c}\text{on met des } \circ \text{ sur la} \\ \text{première colonne}\end{array}\right) \\
= \quad & 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 26 & 10 & 19 & 19 \\ -20 & -6 & -8 & -20 \\ -6 & 1 & -10 & \circ \end{pmatrix} && \left(\begin{array}{c}\text{on se ramène à une matrice} \\ \text{de taille strictement inférieure}\end{array}\right) \\
\underset{L_2 \longleftarrow -\frac{1}{2}L_2}{\overset{C_1 \longleftarrow \frac{1}{2}C_1}{=}} & 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 13 & 10 & 19 & 19 \\ 5 & 3 & 4 & 10 \\ -3 & 1 & -10 & \circ \end{pmatrix} && \left(\begin{array}{c}\text{on simplifie les coefficients} \\ \text{pour faciliter les calculs}\end{array}\right) \\
\underset{\text{puis } C_1 \longleftrightarrow C_2}{\overset{L_1 \longleftrightarrow L_3}{=}} & 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -10 & \circ \\ 3 & 5 & 4 & 10 \\ 10 & 13 & 19 & 19 \end{pmatrix} && \left(\begin{array}{c}\text{on met un 1 en haut à gauche} \\ \text{pour préparer le terrain}\end{array}\right) \\
\underset{L_3 \longleftarrow L_3 - 1\circ L_1}{\overset{L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_1}{=}} & 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -10 & \circ \\ \circ & 14 & 34 & 10 \\ \circ & 43 & 119 & 19 \end{pmatrix} && \left(\begin{array}{c}\text{on met des } \circ \text{ sur la} \\ \text{première colonne}\end{array}\right) \\
= \quad & 2 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 14 & 34 & 10 \\ 43 & 119 & 19 \end{pmatrix} && \left(\begin{array}{c}\text{on se ramène à une matrice} \\ \text{de taille strictement inférieure}\end{array}\right).
\end{aligned}$$

Or la sous-famille $\left(\begin{pmatrix} 14 \\ 43 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 19 \end{pmatrix}\right)$ est libre car son déterminant $\begin{vmatrix} 14 & 10 \\ 43 & 19 \end{vmatrix} = 14 \cdot 19 - 43 \cdot 10 \leq 20^2 - 430 < 0$ est non nul, ce qui montre que $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 14 & 34 & 10 \\ 43 & 119 & 19 \end{pmatrix} \geq 2$; puisque ce rang par ailleurs est inférieur le nombre de lignes, il vaut 2 exactement. Finalement, le rang cherché vaut 4.

Proposition. *Soient $e \in \mathbf{N}$ et $A \in M_{e,n}(\mathbf{K})$. Le "nombre de paramètres" à choisir pour résoudre un système linéaire "de matrice A" est le nombre d'inconnues moins le rang de A.*

Explication. Par "système linéaire de matrice A" il faut comprendre une conjonction $\forall i \in \{1, 2, ..., e\}$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i$ pour certains scalaires $b_1, b_2, ..., b_e$. Un tel système possède e équations et n inconnues. Il se réécrit sous la forme $AX = B$ où $X \in \mathbf{K}^n$ et $B \in \mathbf{K}^e$ sont les vecteur colonne respectivement des x_j et des b_i. Il s'agit donc d'une équation linéaire (affine). Par conséquent, son ensemble des solutions est, en voyant A dans $L(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^e)$, le translaté de $\operatorname{Ker} A$ (l'ensemble des solutions sans second membre) selon une solution. La dimension de cet espace $\operatorname{Ker} A$ vaut donc $\dim \operatorname{Ker} A = n - \operatorname{rg} A$ d'après le théorème du rang. Or il faut comprendre par "nombre de paramètres" précisément la dimension de l'espace des solutions (sans second membre), ce qui conclut.

Passons à présent à la résolution du système lorsque la matrice du système est carrée et inversible (la technique est la même dans les autres cas).

Théorème (inversion d'une matrice carrée) – Algorithme (pivot de Gauss).

1. *Toute matrice inversible peut se transformer en matrice diagonale par transvections sur ses LIGNES UNIQUEMENT, puis en la matrice identité par dilatations.*
2. *En appliquant les transvections puis dilatations effectuées sur la matrice identité, la matrice obtenue au final est l'inverse de la matrice de départ.*

Description de l'algorithme. Soit $A \in GL_n(\mathbf{K})$.

1. *Mettre un* 1 *en haut à gauche.* Puisque A est inversible, sa première colonne est non nulle, donc contient un coefficient non nul $a_{i_0,1}$ pour un certain indice i_0. Quitte à effectuer la transvection $L_1 \longleftarrow L_1 + \frac{1}{a_{i_0,1}} L_{i_0}$ (qui met un 1 tout en haut à gauche si $a_{1,1} = 0$), on peut supposer $i = 1$.
2. *Annuler la première colonne (sauf* $a_{1,1}$*).* Effectuer les transvections $L_i \longleftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} L_1$ pour tout entier $i \in [2, n]$.
3. *Itérer.* Répéter la même démarche sur la matrice de $GL_{n-1}(\mathbf{K})$ située en bas à droite. On obtient alors une matrices triangulaire.
4. *Annuler la dernière colonne (sauf* $a_{n,n}$*).* Effectuer les transvections $L_i \longleftarrow L_i - \frac{a_{i,nj}}{a_{n,n}} L_n$ pour tout entier $i \in [1, n[$.
5. *Itérer.* Répéter la même démarche sur la matrice de $GL_{n-1}(\mathbf{K})$ située en bas à droite. On obtient alors une matrices diagonale.
6. *Mettre des* 1 *sur la diagonale.* Effectuer les dilatations $L_i \longleftarrow \frac{1}{a_{i,i}} L_i$ pour tout entier $i \in [1, n]$.

Exemple.

$$
\begin{array}{rcc}
 & \begin{pmatrix} -3 & -7 & 7 \\ \circ & 3 & 5 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & \circ & \circ \\ \circ & 1 & \circ \\ \circ & \circ & 1 \end{pmatrix} \\
\xmapsto{L_3 \longleftarrow L_3 - L_1} & \begin{pmatrix} -3 & -7 & 7 \\ \circ & 3 & 5 \\ \circ & 3 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & \circ & \circ \\ \circ & 1 & \circ \\ -1 & \circ & 1 \end{pmatrix} \\
\xmapsto{L_3 \longleftarrow L_3 - L_2} & \begin{pmatrix} -3 & -7 & 7 \\ \circ & 3 & 5 \\ \circ & \circ & -7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & \circ & \circ \\ \circ & 1 & \circ \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
\xmapsto[L_1 \longleftarrow L_1 + L_3]{L_2 \longleftarrow L_2 + \frac{5}{7} L_3} & \begin{pmatrix} -3 & -7 & \circ \\ \circ & 3 & \circ \\ \circ & \circ & -7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \circ & -1 & 1 \\ -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{5}{7} \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
\xmapsto{L_1 \longleftarrow L_1 + \frac{7}{3} L_2} & \begin{pmatrix} -3 & \circ & \circ \\ \circ & 3 & \circ \\ \circ & \circ & -7 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{5}{7} \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
\xmapsto[\substack{L_2 \longleftarrow \frac{1}{3} L_2 \\ L_3 \longleftarrow -\frac{1}{7} L_3}]{L_1 \longleftarrow -\frac{1}{3} L_1} & \begin{pmatrix} 1 & \circ & \circ \\ \circ & 1 & \circ \\ \circ & \circ & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{5}{21} & \frac{2}{21} & \frac{5}{21} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

Sanity check : on a bien l'égalité $\begin{pmatrix} -3 & -7 & 7 \\ \circ & 3 & 5 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{5}{21} & \frac{2}{21} & \frac{5}{21} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} = I_3$.

Application (résolution matricielle d'un système inversible). Lorsque l'on résout un système, on fait habituellement des opérations sur les lignes. L'algorithme du pivot de Gauss fournit une méthode générale de résolution lorsque la matrice du système est inversible et montre qu'il suffit de traiter uniquement la matrice (pas besoin de tout le système). En particulier, si le système (d'inconnue $X \in \mathbf{K}^n$) s'écrit $AX = Y_0$ avec $A \in GL_n(\mathbf{K})$ et $Y_0 \in \mathbf{K}^n$, alors l'unique solution est $A^{-1} Y_0$.

Proposition (inverses de matrices carrées de taille 2 ou 3).

Pour inverser une matrice $A \in GL_2(\mathbf{K}) \cup GL_3(\mathbf{K})$, écrire la matrice dont le coefficient d'indice (i,j) vaut $(-1)^{i+j}$ fois le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en retirant la i-ième ligne et la j-ième colonne (ceci pour tout couple (i,j)), puis diviser cette matrice par $\det A$ *et la transposer.*

Explicitement :

$$\text{si } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \text{ alors } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \text{ fait sens et vaut } \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\text{si } \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} \neq 0, \text{ alors } \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{pmatrix}^{-1} \text{ fait sens et vaut } \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} q & r \\ y & z \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ q & r \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} p & r \\ x & z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ p & r \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} p & q \\ x & y \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Exemple : appliquer à la matrice $\begin{pmatrix} -3 & -7 & 7 \\ \circ & 3 & 5 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ que l'on vient d'inverser.