Polynômes

(résumé)

★ l'indéterminée X N'est PAS un scalaire ! (c'est un polynôme de degré 1).

$(X^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est la ***base canonique*** de $\mathbf{K}[X]$. L'ev $\mathbf{K}[X]$ n'est pas de dim finie.
$(X^k)_{0\le k\le d}$ est la ***base canonique*** de $\mathbf{K}_d[X]$. L'ev $\mathbf{K}_d[X]$ est de dim finie $\underline{\underline{d+1}}$★.

Un polynôme $\sum a_n X^n = C\prod (X-\lambda_i)^{\omega_i}$ est déterminé au choix par :

1. ses coefficients a_n (pratique pour AJOUTER) ;
2. son coefficient dominant C, ses racines complexes λ_i et l'ordre ω_i de multiplicité de chaque racine λ_i (pratique pour MULTIPLIER).

En particulier, si P est UNITAIRE, on a alors $P = \prod_{\substack{\lambda\in\mathbf{C}\\ P(\lambda)=0}} (X-\lambda)^{\text{ordre de }\lambda}$.

Pour évaluer un polynôme P en un polynôme Λ, remplacer partout dans P l'indéterminée par Λ.
★ selon l'usage : $\begin{cases} (X+1)\,P \text{ est un PRODUIT } (X+1)\times P, \\ P(X+1) \text{ est un COMPOSÉ } P\circ(X+1). \end{cases}$ *E. g.* : $P\circ X = P(X) = P$.
L'évaluation en Λ est linéaire, préserve les produits, respecte la dérivation et la composition.

$\deg \sum a_n X^n := \max\{d\ ;\ a_d \neq 0\}$ $\deg 0 := -\infty$.
$\deg \prod P_i = \sum \deg P_i$ $\deg P' = \deg P - 1$ ★$\underline{\underline{\text{sauf si } P=0}}$.
$\deg \sum P_i \le \min \deg P_i$ avec $=$ $\not{S}$SI tous les $\deg P_i$ sont DISTINCTS.

Division euclidienne : soit A, soit $B\underline{\underline{\neq 0}}$, alors $\exists!\,(Q,R)$ tel que $\begin{cases} \deg R < \deg B \\ A = BQ+R \end{cases}$.

$\begin{cases} D \mid M \\ ★\ M\neq 0 \end{cases} \Longrightarrow$ $\deg D \le \deg M$ avec égalité SSI D et M sont ASSOCIÉS. ($\parallel$ avec la divisibilité dans $\mathbf{Z}$)

λ racine de $P \Longleftrightarrow P(\lambda)=0 \Longleftrightarrow X-\lambda \mid P$.
λ racine de P d'ordre $\omega \Longleftrightarrow \begin{cases} (X-\lambda)^{\omega} \mid P \\ (X-\lambda)^{\omega+1} \nmid P \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} P^{(k<\omega)}(\lambda) = 0 \\ P^{(\omega)}(\lambda) \neq 0 \end{cases}$.
★★★ Un polynôme P est nul s'il admet au moins $(\deg P)+1$ racines.
★★★ $\begin{cases} \forall i,\ (X-\lambda_i)^{\omega_i} \mid P \\ \lambda_i \text{ DISTINCTS} \end{cases} \Longrightarrow \prod_i (X-\lambda_i)^{\omega_i} \mid P$.

★★ Tout polynôme complexe NON CONSTANT admet une racine.
★ Contres-exemples réels : X^2+1 ou tout trinôme de degré 2 avec $\Delta<0$ (dit ***irréductible***).
Tout polynôme réel est produit d'un polynôme réel scindé par un produit d'irréductibles de degré 2.
exemple : $X^8 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+1)(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$.
P unitaire scindé $\Longrightarrow \begin{cases} \sum \text{racines} = -\text{coef sous-dominant} \\ \prod \text{racines} = (-1)^{\deg P} \text{ coef constant} \end{cases}$ (MNÉMO : degré 2).
exemple : $\sum \begin{matrix}\text{racienes } n\text{-ièmes} \\ \text{de l'unité}\end{matrix} = \delta_0^n$ et $\prod \begin{matrix}\text{racienes } n\text{-ièmes} \\ \text{de l'unité}\end{matrix} = (-1)^{n-1}$.