# Polynômes

mercredi 3, lundi 8, mardi 9 avril

## Table des matières



Dans tout le chapitre, la lettre $\mathbf{K}$ désignera l'un des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

## 1 L'espace $\mathbf{K}[X]$, degré, les espaces $\mathbf{K}_n[X]$, dérivation

On renvoie au cours sur les fonctions transcendantes pour motiver l'étude des fonctions polynomiales.

**Théorème (existence des polynômes).** *Il existe un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, noté $\mathbf{K}[X]$ (lire "$\mathbf{K}$ crochets $X$"), dont les éléments sont appelés **polynômes à une indéterminée** à coefficients dans $\mathbf{K}$, tel que*

1. *$\mathbf{K}[X]$ contient un polynôme "distingué" noté $X$ et appelé l'**indéterminée** ;*
2. *$\mathbf{K}[X]$ est muni d'une multiplication distributive sur $+$ et compatible avec $\cdot$ ;*
3. *tout polynôme est combinaison linéaire d'un nombre fini de puissances de $X$ :*

$$\forall P \in \mathbf{K}[X], \ \exists n \in \mathbf{N}, \ \exists (a_i) \in \mathbf{K}^{n+1}, \ P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i ;$$

4. *deux polynômes sont égaux ssi leurs familles de coefficients sont égales :*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \ \forall ((a_i), (b_i)) \in \mathbf{K}^{n+1}, \ \left( \sum_{i=0}^{n} a_i X^i = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i \right) \Longleftrightarrow (\forall i \in \{0, 1, ..., n\}, \ a_i = b_i).$$

(Le point 3 dit que la famille $(X^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une famille ***génératrice*** de $\mathbf{K}[X]$, le point 4 que cette famille est ***libre***, les points 3 et 4 ensemble que $(X^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une ***base*** de $\mathbf{K}[X]$, que l'on appellera sa ***base canonique***.)

**Définition-propriété (degré, coefficient dominant).** Soit $P \in \mathbf{K}[X]$, mettons $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. *On appelle **degré** de $P$ l'entier*

$$\deg P := \begin{cases} \max\{i \in \{0, 1, ..., n\} \ ; \ a_i \neq 0\} \ \text{si } P \neq 0 \\ -\infty \ \text{sinon} \end{cases}$$

(la partie dont on prend le max est majorée par $n$ et non vide si $P$ est non nul, donc admet bien un plus grand élément, qui ne dépend pas de l'écriture $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$).

*Si $P$ est non nul, on appelle **coefficient dominant** de $P$ le coefficient $a_{\deg P}$.*

*On dit que $P$ est* ***unitaire*** *ou* ***normalisé*** *s'il est non nul et si son coefficient dominant vaut* 1.

**Exemples.**
Le polynôme $X^2+1$ est unitaire de degré 2.
Le polynôme $3X^{42}+\pi iX$ est de degré 42 et de coefficient dominant 3.
Le polynôme $7(X-i)(X+i)(X-1)(X+1) = 7\left(X^2+1\right)\left(X^2-1\right) = 7X^4-7$ est de degré 4 et de coefficient dominant 7.

**Remarques.** Soit $P\in\mathbf{K}[X]$, disons $P=\sum_{i=0}^n a_iX^i$.
Le scalaire $P(0) := \sum_{i=0}^n a_i0^i = \sum_{i=0}^n a_i\delta_0^i = a_0$ est le ***coefficient constant*** de $P$.
Le scalaire $P(1) := \sum_{i=0}^n a_i1^i = \sum_{i=0}^n a_i$ est la somme des coefficients de $P$.

**Propriétés (degré d'un produit et d'une somme).** Soient $A$ et $B$ deux polynômes dans $\mathbf{K}[X]$.
*On a l'égalité* $\deg(AB)=\deg A+\deg B$ *dans* $\{-\infty\}\cup N$.
*On a la comparaison* $\deg(A+B)\leq\max\{\deg A,\deg B\}$ *avec égalité si* $\deg A\neq\deg B$.

Le premier point se voit très bien pour un produit de monômes : on a clairement $X^pX^q=X^{p+q}$ pour tout $(p,q)\in\mathbf{N}^2$. On pourra donc retenir que le degré se comporte "un peu comme" le logarithme en faisant tomber l'exposant.
Pour exemplifier le second point, on pourra observer les égalités $\deg\left(\sqrt{7}X^{42}+X^{18}\right)=42=\deg\left(\sqrt{7}X^{42}\right)$ et $\deg\left(\left(1-X^2\right)+X^2\right)=\deg 1=0\neq\deg X^2$.

**Corollaire-définition (les s.-e. v. $\mathbf{K}_n[X]$ et leurs bases canoniques).** *Soit $n\in\mathbf{N}$. L'ensemble $\mathbf{K}_n[X] := \{P\in\mathbf{K}[X]\ ;\ \deg P\leq n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ de dimension $\underline{\underline{\underline{n+1}}}$ dont une base est $\left(1,X,X^2,...,X^n\right)=\left(X^i\right)_{0\leq i\leq n}$ (appelée la* ***base canonique*** *de $\mathbf{K}_n[X]$).*

**Définition-propriété (dérivation polynomiale).** *Soit $P\in\mathbf{K}[X]$, mettons $P=\sum_{i=0}^n p_iX^i$. On appelle* ***dérivée*** *de $P$ le polynôme*

$$P' := \sum_{\underline{\underline{i=1}}}^n ip_iX^{i-1} \qquad \left(\begin{array}{c}\textit{qui ne dépend que de } P \textit{ et non}\\ \textit{de l'écriture } P=\sum_{i=0}^n p_iX^i\end{array}\right).$$

On dérivera donc un polynôme comme on a toujours dérivé une fonction polynomiale.

**Propriétés-définition (dérivation, polynômes constants).**
*La dérivation est un endomorphisme de $\mathbf{K}[X]$ de noyau $\mathbf{K}$ (ensemble des polynômes* ***constants****) défini par*

$$\left\{\begin{array}{l} X^n\mapsto nX^{n-1}\ \textit{si}\ n\neq 0\\ 1\mapsto 0\end{array}\right. .$$

*On a pour tous polynômes $P$ et $Q$ les égalités*

$$\begin{array}{rcl}\deg P' &=& (\deg P)-1\ \textit{SAUF SI}\ P=0\,;\\ [PQ]' &=& P'Q+PQ'\,;\\ [PQ]^{(n)} &=& \sum_{i=0}^n\binom{n}{i}P^{(i)}Q^{(n-i)}\ \textit{pour tout}\ n\in\mathbf{N}.\end{array}$$

**Démonstration de la formule de Leibniz.** Afin d'alléger les calculs, utilisons la théorie des espaces vectoriels. L'idée fondamentale est que les deux membres de l'égalité à montrer sont *linéaires* en $P$ et en $Q$, donc leur égalité pour polynômes $P$ et $Q$ revient à celle pour tout $P$ et $Q$ élément d'une *base*. Mettons cette idée en œuvre.
Soit $(p,q)\in\mathbf{N}^2$. Soit $(a,b)\in\{1,2,...,p\}\times\{1,2,...,q\}$. On a les égalités

$$\begin{array}{rcl}[X^a]'X^b+X^a\left[X^b\right]' &=& aX^{a-1}X^b+X^abX^{b-1}\\ &=& aX^{a+b-1}+bX^{a+b-1}\\ &=& (a+b)X^{a+b-1}\\ &=& \left[X^{a+b}\right]'\\ &=& \left[X^aX^b\right]',\end{array}$$

égalités restant valides lorsque $ab=0$, ce qui montre que les applications linéaires

$$\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{K}_p[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ A & \longmapsto & \left[AX^b\right]'\end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{K}_p[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ A & \longmapsto & A'X^b+A\left[X^b\right]'\end{array}\right.$$

coïncident sur une base de $\mathbf{K}_p[X]$ (sa base canonique), donc sont égales. Soit ensuite $P\in\mathbf{K}_p[X]$ : l'égalité des applications précédentes permet alors d'affirmer que les applications

$$\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{K}_q[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ Q & \longmapsto & [PQ]'\end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{K}_q[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ Q & \longmapsto & P'Q+PQ'\end{array}\right.$$

coïncident sur une base de $\mathbf{K}_q[X]$ (sa base canonique), donc sont égales, *c. q. f. d.*.

# 2 Division euclidienne

**Définition (divisibilité).** *Soient $(D,M)\in\mathbf{K}[X]$. On dit que* $\left\{\begin{array}{ll} & D \textit{ **divise** } M \\ \text{ou} & D \textit{ est un **diviseur** de } M \\ \text{ou} & M \textit{ est un **multiple** de } D\end{array}\right.$ *si* $\exists P\in\mathbf{K}[X]\,,\ M=DP$. *On note alors $D\mid M$.*

**Exemples.** On a les divisibilités :
$X+i\mid X^2+1$ ;
$X-1\mid X^n-1$ pour tout entier $n\in\mathbf{N}$ ;
$P\mid 0$ pour tout polynôme $P$.

**Propriété-définition (polynômes associés).** *Soit $(P,Q)\in\mathbf{K}[X]^2$. Si* $\left\{\begin{array}{l}P\mid Q\\ Q\mid P\end{array}\right.$ *, alors $\exists\lambda\in\mathbf{K}^*,\ Q=\lambda P$ et on dit que $P$ et $Q$ sont **associés**.*

**Propriété.** *Soit $(A,B)\in\mathbf{K}[X]$ tel que $A\mid B$ avec $B$ supposé NON NUL. On a alors la comparaison $\deg A\leq\deg B$ avec égalité ssi $A$ et $B$ sont associés.*

On fera le parallèle entre ce qui précède et la divisibilité des entiers définie par

$$\forall (d,m)\in\mathbf{Z}^2,\ (d\mid m)\overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow}(\exists a\in\mathbf{N},\ m=da)$$

Par exemple, deux entiers sont associés ssi leur rapport vaut $\pm1$. De plus, si un entier $a$ divise un entier $b$, on a alors la comparaison $|a|\leq|b|$ avec égalité ssi $a$ et $b$ sont associé. Le degré des polynômes joue donc un rôle analogue à la valeur absolue chez les entiers. Cela explique la forme suivante de l'énoncé de la division euclidienne chez les polynômes.

**Théorème-définition (division euclidienne).** *Soit $B\in\mathbf{K}[X]$ NON NUL. Alors*

$$\forall A\in\mathbf{K}[X]\,,\ \exists!\,(Q,R)\in\mathbf{K}[X]\times\mathbf{K}_{\deg B-1}[X]\,,\quad \underbrace{A}_{\text{le } \textit{\textbf{dividende}}}=\underbrace{B}_{\text{le } \textit{\textbf{diviseur}}}\underbrace{Q}_{\text{le } \textit{\textbf{quotient}}}+\underbrace{R}_{\text{le } \textit{\textbf{reste}}}.$$

MNÉMO On ne divise jamais par 0, donc le diviseur est NON NUL.

**Présentation** : on pose la division comme appris en C. É. 2 pour les entiers naturels et on cherche à chaque étape à annuler le terme dominant du reste. On s'arrête quand le reste a un degré strictement inférieur à celui de $B$.

**Exemples.** [plein de jolies divisions posées à la main]
Diviser $X^4+1$ par $X+1$ donne $X^4+1=\left(X^3-X^2+X-1\right)(X+1)+2$.
Diviser $6X^6$ par $2X-1$ donne $6X^6=\left(3X^5+\frac{3}{2}X^4+\frac{3}{4}X^3+\frac{3}{8}X^2+\frac{3}{16}X+\frac{3}{32}\right)(2X-1)+\frac{3}{32}$.
Diviser $4X^5+X^3-1$ par $4X^2+X+1$ donne $4X^5+X^3-1=\left(X^3-\frac{1}{4}X^2+\frac{1}{16}X+\frac{3}{64}\right)\left(4X^2+X+1\right)-\left(\frac{7}{64}X+\frac{67}{64}\right)$.
Diviser $7X^5+1$ par $X^3-2X$ donne $7X^5+1=\left(7X^2+14\right)\left(X^3-2X\right)+(28X+1)$.
Diviser $X^4-2X^2$ par $3X+1$ donne $X^4-2X^2=\left(\frac{1}{3}X^3-\frac{1}{9}X^2-\frac{17}{27}X+\frac{17}{81}\right)(3X+1)-\frac{17}{81}$.

**Sanity check :** redévelopper le polynôme $BQ+R$ et vérifier que l'on retombe bien sur $A$ !

**Exercice.** *Soit $(\theta,n)\in\mathbf{R}\times\mathbf{N}$. Trouver le reste de la division euclidienne de $((\sin\theta)X+\cos\theta)^n$ par $X^2+1$.*

On sait que la division s'écrit $((\sin\theta)X+\cos\theta)^n=Q\left(X^2+1\right)+R$ pour certains polynôme $Q$ et $R$ avec $\deg R<\deg\left(X^2+1\right)$. On peut donc écrire $R=aX+b$ pour certains réels $a$ et $b$. Comme on ne connaît rien de $Q$, on évalue l'égalité exprimant la division en des scalaires qui le font disparaître, par exemple $\pm i$. On obtient ainsi $((\sin\theta)(\pm i)+\cos\theta)^n=0+a(\pm i)+b$, *i. e.* $e^{\pm in\theta}=b\pm ia$, d'où (en identifiant les parties réelles et imaginaires) l'égalité $\binom{a}{b}=\binom{\sin n\theta}{\cos n\theta}$.

# 3 Évaluation, racines

On note $\mathbf{L}$ le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. ($\mathbf{L}$ joue le même rôle que $\mathbf{K}$ mais de manière indépendante.)

**Définition-propriétés (évaluation en un scalaire).**
*Soit $\lambda\in\mathbf{K}$. On appelle **évaluation** en $\lambda$ l'application :* $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbf{L}[X] & \longrightarrow & \mathbf{C}\\ \sum_{i=0}^n a_iX^i & \longmapsto & \sum_{i=0}^n a_i\lambda^i\end{array}\right.$ *. L'image d'un polynôme $P$ par l'évaluation en $\lambda$ ne dépend pas de l'écriture $P=\sum_{i=0}^n a_iX^i$ et est notée*

$$P(\lambda).$$

1. *L'évaluation en $\lambda$ est une application linéaire qui respecte la multiplication au sens où l'on a*
$$\forall(P,Q,R,a)\in\mathbf{L}[X]^3\times\mathbf{C},\ [aP+QR](\lambda)=aP(\lambda)+Q(\lambda)R(\lambda).$$
2. *L'ensemble d'arrivée de l'évaluation en $\lambda$ dépend des corps $\mathbf{K}$ et $\mathbf{L}$ :*

| $\mathbf{K}\diagdown\mathbf{L}$ | $\mathbf{R}$ | $\mathbf{C}$ |
|---|---|---|
| $\mathbf{R}$ | $\mathbf{R}$ | $\mathbf{C}$ |
| $\mathbf{C}$ | $\mathbf{C}$ | $\mathbf{C}$ |

3. *Pour tout intervalle $I$ infini de $\mathbf{R}$, l'application* $\left\{\begin{array}{ccc}I & \longrightarrow & \mathbf{K}\\ t & \longmapsto & P(t)\end{array}\right.$ *(dite **application polynomiale** associée à $P$) est dérivable de dérivée* $\left\{\begin{array}{ccc}I & \longrightarrow & \mathbf{K}\\ t & \longmapsto & P'(t)\end{array}\right.$.

À RETENIR :

1. On évalue des polynômes comme on évalue des fonctions : en remplaçant l'indéterminée (resp. l'argument) par ce en quoi on évalue.
2. On peut évaluer un polynôme réel en un complexe.
3. On ne se posera pas de questions pour dériver un polynôme ou sa fonction polynomiale associée.

**Propriété.** *Soit $(P,\lambda)\in\mathbf{L}[X]\times\mathbf{K}$. Alors le reste de la division euclidienne de $P$ par $X-\lambda$ est $P(\lambda)$.*

**Démonstration.** Appelons $R$ le reste de la division considérée (qui fait sens puisque le diviseur $X-\lambda$ est non nul). Puisqu'on a $\deg R<\deg(X-\lambda)=1$, le reste $R$ est un polynôme constant, donc vaut sa valeur en n'importe quel scalaire, d'où en particulier $R=R(\lambda)$. Ainsi, évaluer en $\lambda$ l'égalité $P=(X-\lambda)Q+R$ (où $Q$ est le quotient de la division) donne $P(\lambda)=0+R(\lambda)=R$, *c. q. f. d.*.

**Définition (racine).** *Soit $P\in\mathbf{L}[X]$, mettons $P=\sum_{i=0}^n a_iX^i$. Soit $\lambda\in\mathbf{K}$. On dit que $\lambda$ est une **racine** (ou un **zéro**) de $P$ si $P(\lambda)=0$.*

**Proposition (racine et divisibilité).** *Soit $(P,\lambda)\in\mathbf{L}[X]\times\mathbf{K}$. Alors on a l'équivalence*

$$\lambda \text{ racine de } P\iff X-\lambda\mid P.$$

**Généralisation (très très très utile).** *Soient $n\in\mathbf{N}$, $P\in\mathbf{L}[X]$ et $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ des scalaires DISTINCTS. On a alors l'équivalence*

$$(\forall i\in\{1,2,...,n\},\ \lambda_i \text{ est racine de } P)\iff\left(\prod_{i=1}^n(X-\lambda_i)\text{ divise } P\right).$$

(★ C'est complètement faux sans l'hypothèse de distinction : par exemple, si $(n, P) = (18, X)$ et si $\lambda_i = 0$ pour tout entier $i \in [1, 18]$, alors les dix-huit $\lambda_i$ sont racines de $P$ mais le produit $\prod_{i=1}^{18} (X - \lambda_i) = X^{18}$ ne peut pas diviser $X$ pour des questions de degrés)

**Corollaire (très souvent utilisé).** *Soit $P$ un polynôme. Alors :*

1. *si $P$ est non nul, alors $P$ admet au plus $\deg P$ racines ;*
2. *si $P$ admet au moins $(\deg P) + 1$ racines, alors $P$ est nul.*

**Application (interpolation).** *Soient $n \in \mathbf{N}$, $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$ des scalaires distincts et $\mu_0, ..., \mu_n$ des scalaires (tous les scalaires sont dans $\mathbf{K}$). Montrer que $\exists! P \in \mathbf{K}[X]$, $\deg P \leq n$ et $\forall i \in \{0, 1, ..., n\}$, $P(\lambda_i) = \mu_i$.*

L'énoncé demande de montrer la surjectivité de l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(\lambda_i)) \end{array} \right.$. Vu que les évaluations en les $\lambda_i$ sont linéaires, on montre aisément que $\varphi$ est linéaire. Puisque $\dim \mathbf{K}_n[X] = n + 1 = \dim \mathbf{K}^{n+1}$, il suffit de montrer l'injectivité de $\varphi$. Soit donc $P \in \operatorname{Ker} \varphi$. Alors $\lambda_i$ est racine de $P$ pour tout entier $i \in [0, n]$, donc le produit $\prod_{i=0}^{n} (X - \lambda_i)$ divise $P$ : si $P$ était non nul, on en déduirait la comparaison $\underbrace{\deg \left( \prod_{i=0}^{n} (X - \lambda_i) \right)}_{=n+1} \leq \deg P$, ce qui est impossible vu que $P \in \mathbf{K}_n[X]$.

Les polynômes se situent à l'interface de l'algèbre linéaire et de l'analyse. On ne s'étonnera donc pas d'utiliser des outils de provenances diverses dans les exercices polynomiaux.

**Exercice (autour du T. V. I.).** *Soit $P$ un polynôme réel de degré impair. Montrer qu'il admet une racine réelle.*

Quitte à diviser $P$ par son coefficient dominant (ce qui ne change ni l'hypothèse ni la conclusion), on peut supposer $P$ unitaire, mettons $P = X^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. On a alors pour tout réel $x$ l'égalité et les tendances

$$P(x) = \underbrace{\overbrace{x^{\deg P}}^{\substack{\longrightarrow \infty \text{ quand} \\ x \to \infty}}}_{\substack{\longrightarrow -\infty \text{ quand} \\ x \to -\infty \text{ car} \\ \deg P \text{ est impair}}} \underbrace{\left( 1 + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\substack{\longrightarrow 0 \text{ quand} \\ |x| \to \infty}} \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{x^{n-i}}}_{\substack{\text{borné quand} \\ |x| \to \infty}}}_{\longrightarrow 0 \text{ quand } |x| \to \infty} \right)}_{\longrightarrow 1 \text{ quand } |x| \to \infty},$$

ce qui montre [dessin] que $P$ atteint des valeurs strictement positives au voisinage de $\infty$ et atteint des valeurs strictement négatives au voisinage de $-\infty$. Puisque par ailleurs l'application polynomiale $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & P(t) \end{array} \right.$ est continue, le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure.

**Exercice (autour de Rolle).** *Soient $n \in \mathbf{N}$ et $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$ des réels DISTINCTS. On pose $P := \prod_{i=0}^{n} (X - \lambda_i)$. Montrer que $P'$ a autant de racines réelles que son degré.*

Soit $i$ un entier dans $[0, n]$. La fonction polynomiale $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & P(t) \end{array} \right.$ est $C^1$ sur le segment $[\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ et prend la même valeur (0) en ses extrémités, donc le théorème de Rolle nous donne un zéro dans $]\lambda_{i-1}, \lambda_i[$ de la fonction $f' : t \mapsto P'(t)$ ; appelons $\mu_i$ une telle racine de $P'$. Vu les comparaison $\lambda_0 < \mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n-1} < \mu_n < \lambda_n$, les $n$ réels $\mu_i$ sont distincts, ce qui conclut puisque $\deg P' = \deg P - 1 = n$.

**Exercice (Rolling back to differential equations).** *On reprend les notations et hypothèses de l'exercice précédent. Soit $a$ un réel. Montrer que $P' + aP$ a autant de racines que son degré.*

(L'exercice précédent traitait le cas $a = 0$.)

La forme nous rappelant une équation différentielle linéaire d'ordre 1, il est naturel d'essayer de faire intervenir le facteur intégrant $e^{a \operatorname{Id}}$. En effet, on a pour tout $t$ réel l'égalité

$$[P' + aP](t) = P'(t) + aP(t) = e^{-at} \times \frac{\partial}{\partial t} \left( P(t) e^{at} \right),$$

ce qui montre (because exp cancels nowhere) que les racines de $P' + aP$ sont exactement les zéros de la dérivée de la fonction $s \mapsto P(s) e^{st}$. Or cette dernière s'annule $n+1$ fois (en les racines de $P$), donc sa dérivée s'annule $n$ fois (par le même argument qu'à l'exercice précédent), ce qui conclut presque.

Pourquoi "presque" ? Parce que le polynôme $P' + aP$ n'est plus forcément de degré $n$ comme avant (c'était le cas lorsque $a = 0$). Supposons ici $a \neq 0$. On a alors $\deg(aP) = \deg P < \deg P'$, donc le polynôme $P' + aP$ est de degré $\max\{\deg(aP), \deg P'\} = n+1$. Sachant qu'il possède $n$ racines distinctes (notons-les $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$), il est divisible par $\prod_{i=1}^{n}(X - \mu_i)$, donc est de la forme $Q\prod_{i=1}^{n}(X - \mu_i)$ pour un certain polynôme $Q$. Or prendre les degrés montre que $Q$ est de degré 1, donc admet une racine, d'où la dernière racine cherchée pour $P' + aP$.

# 4 Racines multiples

Dans la section précédente, on avait affaire à des polynômes de la forme $\prod(X - \lambda_i)$ où les racines $\lambda_i$ étaient *distinctes*. Cette section précise ce qui se passe lorsque des $\lambda_i$ coïncident, ce qui permettra de généraliser les résultats (et exercices) précédents.

Intuitivement, dans le polynôme $X^{18}(X-1)^{42}$ on a envie de dire que la racine 0 est en 18 exemplaires et que la racine est en 42 exemplaires. Ce qui devient important n'est alors plus le fait que tel *scalaire* $\lambda$ *soit racine* (ici 0 ou 1) mais *à quelle puissance maximale* $X - \lambda$ *divise* le polynôme de départ. Ces considérations devraient motiver la définition suivante.

**Définition (racine multiple, ordre de multiplicité).** Soient $P$ un polynôme et $\lambda$ un scalaire.

*On appelle **ordre (de multiplicité)** de $\lambda$ comme racine de $P$ le plus grand nombre $\omega \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ tel que $(X - \lambda)^{\omega} \mid P$.*

*Si $\lambda$ est d'ordre 1, on dit que $\lambda$ est une racine **simple**.*

*Si $\lambda$ est d'ordre 2, on dit que $\lambda$ est une racine **double**.*

*Si $\lambda$ est d'ordre 3, on dit que $\lambda$ est une racine **triple**.*

*[etc.]*

*Si $\lambda$ est d'ordre $> 1$, on dit que $\lambda$ est une racine **multiple**.*

**Remarques.**

Si un scalaire est d'ordre infini, alors le polynôme en question est nul. Réciproquement, tout scalaire est d'ordre infini pour le polynôme nul.

Un scalaire d'ordre 0 n'est pas une racine. Par conséquent, ★ si $\lambda$ n'est pas une racine simple, alors $\lambda$ n'est pas forcément une racine multiple !

**Exemple.** Dans le polynôme $\left(X - \sqrt{2}\right)^2 (X - \pi i)^7$, le scalaire $\sqrt{2}$ est d'ordre 2 et le scalaire $\pi i$ est d'ordre 7

**Proposition (ordre et dérivées).** Soient $P$ un polynôme non nul et $\lambda$ un scalaire. Alors l'ordre de $\lambda$ comme racine de $P$ est le plus grand nombre $\omega \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ tel que

$$P(\lambda) = P'(\lambda) = P''(\lambda) = \cdots = P^{(\omega-1)}(\lambda) = 0 \neq P^{(\omega)}(\lambda)$$

**Remarque.** Si $P$ est non nul, alors $P^{(\deg p)}$ est constant et non nul, ce qui assure l'existence d'un plus grand entier comme ci-dessus.

**Application.** *Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que le polynôme $\sum_{i=0}^{n} \frac{X^i}{i!}$ n'a pas de racine multiples.*

Notons $P$ le polynôme donné. Soit $\lambda$ une racine de $P$. Vu que $P' = P - \frac{X^n}{n!}$, on a les équivalences

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ est racine multiple de } P &\iff \lambda \text{ est d'ordre } \geq 2 \\
&\iff P(\lambda) = P'(\lambda) = 0 \\
&\iff P'(\lambda) = 0 \quad \text{car } \lambda \text{ est racine de } P \\
&\iff \underbrace{P(\lambda)}_{=0} - \frac{\lambda^n}{n!} = 0 \\
&\iff \frac{\lambda^n}{n!} = 0 \\
&\iff \lambda = 0.
\end{aligned}$$

Or 0 n'est pas racine de $P$ puisque son coefficient constant vaut 1, ce qui montre que l'énoncé "$\lambda$ est racine multiple de $P$" mène à une contradiction, *c. q. f. d.*.

Les ordres de multiplicités permettent de généraliser la généralisation déjà très très très utile.

**Théorème (très très TRÈS utile).** *Soient $(P,n) \in \mathbf{K}[X] \times \mathbf{N}$, $(\lambda_i) \in \mathbf{K}^n$ et $(\omega_i) \in \mathbf{N}^n$. On a alors l'implication*

$$(\forall i \in \{1,2,...,n\},\ (X-\lambda_i)^{\omega_i} \mid P) \Longrightarrow \left(\prod_{i=1}^{n} (X-\lambda_i)^{\omega_i} \mid P\right).$$

**Exercice.** *Soient $n \in \mathbf{N}$ et $x_0, x_1, ..., x_n$ des réels. On pose $P := \prod_{i=0}^{n}(X-x_i)$. Soit $a \in \mathbf{R}$. Montrer que $P' + aP$ a autant de racines réelles "comptées avec multiplicité" que son degré.*

(L'expression entre guillemets se clarifiera au cours de la démonstration.)

Notons $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ les racines *distinctes* de $P$ (chaque $\lambda_i$ est donc un certain $x_j$ et on a $r \leq n$), ce qui permet d'écrire $P = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\omega_i}$ où $\omega_i$ dénote pour tout $i$ l'ordre de $\lambda_i$ (comme racine de $P$). Alors $P'+aP$ annule toute racine *multiple* de $P$ ; précisons à quel ordre.

Soit $i$ un entier dans $[1,r]$. Soit $k$ un entier dans $[0, \omega_i - 1[$. On a alors

$$\begin{aligned}
\text{d'une part } [P'+aP]^{(k)}(\lambda_i) &= \underbrace{P^{(k+1)}(\lambda_i)}_{=0 \text{ car } k+1<\omega_i} + a \underbrace{P^{(k)}(\lambda_i)}_{=0 \text{ car } k<\omega_i} = 0, \\
\text{d'autre part } [P'+aP]^{(\omega_i-1)}(\lambda_i) &= \underbrace{P^{(\omega_i)}(\lambda_i)}_{\neq 0 \text{ car } \lambda_i \text{ est d'ordre } \omega_i} + a \underbrace{P^{(\omega_i-1)}(\lambda_i)}_{=0 \text{ car } \omega_i-1<\omega_i} \neq 0,
\end{aligned}$$

ce qui montre que $\lambda_i$ est d'ordre $\omega_i - 1$ comme racine de $P'+aP$. On en déduit que le produit $\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\omega_i-1}$ divise $P'+aP$. Vu que le degré de ce produit vaut

$$\deg\left(\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\omega_i-1}\right) = \sum_{i=1}^{r}\deg\left((X-\lambda_i)^{\omega_i-1}\right) = \sum_{i=1}^{r}(\omega_i-1) = \sum_{i=1}^{r}\omega_i - \sum_{i=1}^{r}1 = n-r$$

et que l'on a par ailleurs l'égalité

$$n = \deg P = \deg\left(\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\omega_i}\right) = \sum_{i=1}^{r}\deg\left((X-\lambda_i)^{\omega_i}\right) = \sum_{i=1}^{r}\omega_i,$$

on peut écrire $P'+aP = Q\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\omega_i-1}$ pour un certain polynôme $Q$ de degré $r$.

Pour conclure, il reste à montrer que $Q$ admet autant de racines réelles "comptées avec multiplicité" que son degré. Un exercice précédent montre en en fait qu'il suffit d'exhiber $\underline{\underline{r-1}}$ racines réelles pour $Q$. To achieve this, we could "Rolle back" to differential equations like we did in a previous exercice. Let us rather give another argument based on the intermediate value theorem.

Soit $t$ un réel autre que les racines de $P$. On peut alors diviser par $P(t)$, ce qui permet de factoriser

$$[P'+aP](t) = P(t)\left(a + \frac{P'(t)}{P(t)}\right) = P(t)\left(a + \sum_{i=1}^{r}\frac{\omega_i}{t-\lambda_i}\right)$$

(on rappelle que la dérivée logarithmique $f \mapsto \frac{f'}{f}$ transforme produits en somme et envoie $(X-\lambda)^{\omega}$ sur $\frac{\omega(X-\lambda)^{\omega-1}}{(X-\lambda)^{\omega}} = \frac{\omega}{X-\lambda}$ pour tout $(\omega,\lambda) \in \mathbf{N} \times \mathbf{K}$). Soit $k$ un entier dans $[1,r]$. Puisque les homographies $\frac{\omega_i}{\mathrm{Id}-\lambda_i}$ décroissent chacune sur chacun des intervalles où elle est définie, leur somme décroît sur l'intervalle $]\lambda_{k-1}, \lambda_k[$. On a par ailleurs les tendances [dessin]

$$\sum_{i=1}^{r}\frac{\omega_k}{\mathrm{Id}-\lambda_i} = \begin{cases} \overbrace{\frac{\omega_k}{\mathrm{Id}-\lambda_k}}^{\longrightarrow -\infty \text{ en } \lambda_k^-} + \overbrace{\sum_{1\leq i\leq r}^{i\neq k}\frac{\omega_k}{\mathrm{Id}-\lambda_i}}^{\text{bornée car continue au voisinage de } \lambda_k} \xrightarrow{\lambda_k^-} -\infty \\ \text{ou} \\ \underbrace{\frac{\omega_{k-1}}{\mathrm{Id}-\lambda_{k-1}}}_{\longrightarrow \infty \text{ en } \lambda_{k-1}^+} + \underbrace{\sum_{1\leq i\leq r}^{i\neq k-1}\frac{\omega_k}{\mathrm{Id}-\lambda_i}}_{\text{bornée car continue au voisinage de } \lambda_{k-1}} \underset{\lambda_{k-1}^+}{\longrightarrow} \infty \end{cases}$$

et la continuité de $\sum_{i=1}^{r}\frac{\omega_k}{\mathrm{Id}-\lambda_i}$, ce qui montre (*cf.* exercice "autour du T. V. I.") que la fonction $\sum_{i=1}^{r}\frac{\omega_k}{\mathrm{Id}-\lambda_i}$ s'annule sur $]\lambda_{k-1},\lambda_k[$ et possède $r-1$ racines sur $]\lambda_0,\lambda_r[$. Il est donc de même pour le polynôme $P'-aP$, *c. q. f. d.*.

# 5 Polynômes scindés

**Définition (polynôme scindé).** *Un polynôme est dit* ***scindé*** *s'il peut s'écrire sous la forme* $C\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$ *pour certains scalaires* $C,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$.

**Exemple (cyclotomique).** Soit $n\in\mathbf{N}^*$. Alors le polynôme $X^n-1$ a $n$ racines distinctes, les *precisely-called* racines $n$-ièmes de l'unité $e^{2i\pi\frac{k}{n}}$ pour $k$ décrivant $\{0,1,...,n\}$ ; puisque ces racines sont en nombre $\deg(X^n-1)$ et que $X^n-1$ est unitaire, il vaut le produit des $X-\lambda$ pour $\lambda$ décrivant ces racines (ou ses racines), d'où l'égalité

$$X^n-1=\prod_{k=0}^{n}\left(X-e^{2i\pi\frac{k}{n}}\right).$$

**Proposition.** *Soit $P$ un polynôme scindé, mettons $P=dX^n+sX^{n-1}+\cdots+c$. Alors la somme des racines de $P$ (comptées avec multiplicités) vaut $-\frac{s}{d}$ et leur produit $(-1)^n\frac{c}{d}$.*

(Cela généralise le fait que les racines de $(X-\lambda)(X-\mu)=X^2-(\lambda+\mu)X+\lambda\mu$ ont pour somme l'opposé du coefficient en $X$ et pour produit le coefficient constant.)

**Exemple (somme et produit des racines $n$-ièmes de l'unité).** Soit $n\in\mathbf{N}^*$.

Le produit des racines $n$-ième de l'unité vaut $(-1)^n$ le coefficient constant de $X^n-1$, à savoir $(-1)^{n-1}$.

Leur somme vaut l'opposé du coefficient en $X^{n-1}$ de $X^n-1$, à savoir ou bien $0$ (si $n>1$) ou bien $1$ (si $n=1$).

**Sanity check** : calculer directement à la main ces produit et somme.

**Proposition (caractérisation d'un polynôme par ses racines, ordres et coefficient dominant) (TRÈS très TRÈS utile).** *Deux polynômes scindés coïncident ssi ils ont*

1. *même coefficient dominant ;*
2. *mêmes racines ;*
3. *même ordre de multiplicité pour chaque racine.*

**Exercice.** *Soit $P\in\mathbf{C}[X]$ scindé dont les ordres des racines sont distincts. On suppose que $P(t)\in\mathbf{R}$ pour tout réel $t$. Montrer que $P\in\mathbf{R}[X]$.*

On peut par hypothèse écrire $P=C\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\omega_i}$ où les $\omega_i$ sont distincts. On a alors pour tout réel $t$ l'égalité $C\prod_{i=1}^{r}(t-\lambda_i)^{\omega_i}=\overline{C\prod_{i=1}^{r}(t-\lambda_i)^{\omega_i}}$, *i. e.* $C\prod_{i=1}^{r}(t-\lambda_i)^{\omega_i}=\overline{C}\prod_{i=1}^{r}\left(t-\overline{\lambda_i}\right)^{\omega_i}$, ce qui montre que le polynôme $C\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\omega_i}-\overline{C}\prod_{i=1}^{r}\left(X-\overline{\lambda_i}\right)^{\omega_i}$ s'annule sur $\mathbf{R}$, donc est nul, d'où l'égalité $C\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\omega_i}=\overline{C}\prod_{i=1}^{r}\left(X-\overline{\lambda_i}\right)^{\omega_i}$.

On en déduit déjà l'égalité des coefficients dominants $C=\overline{C}$, ce qui montre que $C$ est réel.

Soit ensuite $i$ un entier dans $[1,r]$. Alors $\lambda_i$ est d'ordre $\omega_i$ dans le membre de droite, donc aussi dans celui de gauche ; or les $\omega_j$ sont distincts, donc le seul scalaire d'ordre $\omega_i$ du membre de droite est $\overline{\lambda_i}$, ce qui force $\lambda_i=\overline{\lambda_i}$, *i. e.* $\lambda_i\in\mathbf{R}$. On en déduit que $P$ a toutes ses racines réelles.

Finalement, $P$ est le produit d'un réel par un produit de binômes réels, donc est réel, *c. q. f. d.*.

**Exercice.** *Le même en retirant l'hypothèse de distinction des ordres.* (voir le T. G.)

**Exercice.** *Trouver les polynômes complexes $P$ unitaires tels que $P\left(X^2\right)=P(X)P(X+1)$*

Soient un tel $P$ et $\lambda$ une racine complexe de $P$.

Alors $P\left(\lambda^2\right)=\underbrace{P(\lambda)}_{=0}P(\lambda+1)=0$, ce qui montre que l'ensemble des racines de $P$ est stable par passage au carré. Ainsi, si $\lambda$ est de module $>1$, la suite $(\lambda^n)$ est injective (car celle des modules $(|\lambda|^n)$ l'est), d'où une infinité de racines pour $P$, ce qui force sa nullité et contredit son unitarité. De même si $\lambda$ est non nulle et de module $<1$. On en déduit que $\lambda$ est ou bien nulle ou bien sur le cercle unité.

On a également $P\left((\lambda-1)^2\right)=P(\lambda-1)\underbrace{P(\lambda)}_{=0}=0$, ce qui montre que l'ensemble des racines de $P$ est stable par $z\mapsto(z-1)^2$. Or, si $\lambda\notin\left\{0,1,e^{i\frac{\pi}{6}},e^{-i\frac{\pi}{6}}\right\}$, alors $\lambda-1$ n'est ni nulle ni de module 1, donc son carré non plus, donc $(\lambda-1)^2$ ne peut être racine. On en déduit que les seules racines possibles sont 0, 1 et $e^{\pm i\frac{\pi}{6}}$. Or les candidats $e^{\pm i\frac{\pi}{6}}$ sont également à rejeter puisque, si $\lambda=e^{\pm i\frac{\pi}{6}}$, alors $(\lambda-1)^2=\left(e^{\pm\frac{2\pi i}{3}}\right)^2=e^{\mp\frac{2\pi i}{3}}\notin\left\{0,1,e^{i\frac{\pi}{6}},e^{-i\frac{\pi}{6}}\right\}$.

Finalement, une fois scindé, $P$ est de la forme $X^\alpha(X-1)^\beta$ pour certains entiers $\alpha$ et $\beta$. On en déduit

$$\begin{aligned}P\left(X^2\right)&=X^{2\alpha}\left(X^2-1\right)^\beta=X^{2\alpha}(X-1)^\beta(X+1)^\beta\text{ et}\\P(X)\,P(X+1)&=X^\alpha(X-1)^\beta(X+1)^\alpha X^\beta=X^{\alpha+\beta}(X-1)^\beta(X+1)^\alpha,\end{aligned}$$

d'où en identifiant les ordres l'égalité $\alpha=\beta$

Réciproquement, le calcul ci-dessus montre que les solutions recherchées sont exactement les puissances (entières) positives de $X(X-1)$.

**Question** : peut-on scinder $X^2+1$ sur $\mathbf{R}$ ? La réponse est non (puisque $X^2+1$ n'a pas de racines réelles) et c'est pour cela (très grossièrement) que les complexes ont été inventés.

**Théorème (décomposition des polynômes dans $\mathbf{C}[X]$ et $\mathbf{R}[X]$).**

1. *Tout polynôme complexe est scindé.*
2. *Tout polynôme complexe NON CONSTANT admet une racine.*
3. *Tout polynôme réel est produit de binômes réels du premier degré par des trinômes réels du second degré de discriminant strictement négatif (on dit que ces trinômes sont **irréductibles** dans $\mathbf{R}[X]$).*

**Exemples.**

Les polynômes $X^2+1$ et $X^2+X+1$ sont irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$ mais se scindent dans $\mathbf{C}[X]$ en

$$X^2+1=(X-i)(X+i)\qquad\text{et}\qquad X^2+X+1=(X-j)\left(X-\overline{j}\right)\qquad\text{où } j:=e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

Le polynôme $X^{12}+X^{11}-X^8-X^7$ est divisible par $X^7$ et admet $\pm1$ comme racines évidentes (la somme et la somme alternée des coefficients est nulle). La division par $X^7(X-1)(X+1)$ donne alors pour quotient $X^7(X-1)(X+1)\left(X^3-X^2+X-1\right)$. Le dernier facteur admet encore 1 comme racine et se factorise en $\left(X^2+1\right)(X-1)$. On en en déduit la décomposition dans $\mathbf{R}[X]$ de

$$X^{12}+X^{11}-X^8-X^7=\underbrace{X^7(X-1)(X+1)^2}_{\text{dix binômes de degré 1}}\underbrace{\left(X^2+1\right)}_{\substack{\text{un trinôme de}\\\text{degré 2 irréductible}}}.$$

**Exercice.** *Décomposer dans $\mathbf{R}[X]$ le polynôme $X^4+1$.*

On passe dans les complexes (on utilise des racines huitièmes de l'unité) :

$$\begin{aligned}X^4+1&=\left(X^2\right)^2-i^2\\&=\left(X^2-i\right)\left(X^2+i\right)\\&=\left(X-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X+e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\\&\underset{\substack{\text{échange des }2^e\\\text{et }3^e\text{ facteurs}}}{=}\left(X-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X-\overline{e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)\left(X-\overline{e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)\left(X-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\\&=\left(X^2-2\operatorname{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)X+1\right)\left(X^2-2\operatorname{Re}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)+1\right)\\&=\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)\end{aligned}$$