Dimension finie

(résumé)

Le cours ne traite que de familles (x_i) de longueur FINIE.

(x_i) est ***libre*** si $\forall \overrightarrow{\lambda}, (\sum \lambda_i x_i = 0) \Longrightarrow \left(\overrightarrow{\lambda} = \overrightarrow{0}\right)$ Sinon (x_i) ***liée*** : $\Longleftrightarrow$ l'un des x_i est CL des autres.

(x_i) est ***génératrice*** $\Longleftrightarrow \operatorname{Vect}\{x_i\} = E$ (on dit aussi que (x_i) ***engendre*** E)

(x_i) est une ***base*** $\Longleftrightarrow$ (x_i) est libre et génératrice.

interprétation en termes d'applications linéaires : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{\lambda} & \longmapsto & \sum \lambda_i x_i \end{array}\right.$ est $\left\{\begin{array}{c} \text{injective} \\ \text{surjective} \\ \text{bijective} \end{array}\right.$ ssi $(x_i) \left\{\begin{array}{c} \text{est libre} \\ \text{est génératrice} \\ \text{est une base} \end{array}\right.$.

EG : tout famille libre engendre son Vect (parallèle : toute injection induit une bijection sur son image)

EG : ***base canonique*** de $\mathbf{K}^n$: les $(0, 0, ..., 0, 1, 0, 0, ...)$ où la place du 1 varie.

★ un ev n'a pas de base canonique, à l'exception de $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{K}_n[X]$, $\mathbf{K}[X]$ et $M_{p,q}(\mathbf{K})$ (vus plus tard)

(b_i) base $\Longleftrightarrow \forall x,\ \exists! \overrightarrow{\lambda},\ x = \sum \overbrace{\underbrace{\lambda_i}_{\textit{coordonnée}} \quad b_i}^{\textit{composante}}$ $\left(\begin{array}{c} \text{unicité} \Longleftrightarrow \text{liberté} \\ \text{existence} \Longleftrightarrow \text{générateur} \end{array}\right)$

★ pas de sens à $x \mapsto \left\{\begin{array}{c} \text{la coordonée de } x \\ \text{selon le vecteur } b \end{array}\right.$: préciser TOUTE LA BASE contenant b

★★★ Une application linéaire est DÉTERMINÉE PAR L'IMAGE D'UNE BASE : si (e_i) base de E, alors on a une bijection $\left\{\begin{array}{ccc} L(E,F) & \longrightarrow & F^{\dim E} \\ f & \longmapsto & (f(e_i)) \end{array}\right.$ de réciproque $\left\{\begin{array}{ccc} F^{\dim E} & \longrightarrow & L(E,F) \\ (f_i) & \longmapsto & \left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \sum \lambda_i e_i & \longmapsto & \sum \lambda_i f_i \end{array}\right. \end{array}\right.$

E est ***de dimension finie*** s'il est engendré par un nombre fini de vecteurs.

Alors E admet une base et toutes les bases ont même cardinal $\dim E$: la ***dimension*** de E.

EG $\quad \dim \mathbf{K}^n = n \quad \dim \mathbf{K}_n[X] = \underline{\underline{\underline{n+1}}} \quad \dim M_{p,q}(\mathbf{K}) = pq \quad \dim L(E,F) = \dim E \times \dim F$

$\left\{\begin{array}{lll} (\ell_1, ..., \ell_\lambda) \text{ libre} & \Longrightarrow \lambda \leq \dim E & \text{avec = ssi } (\ell_i) \text{ base} \\ (g_1, ..., g_\gamma) \text{ génératrice} & \Longrightarrow \gamma \geq \dim E & \text{avec = ssi } (g_i) \text{ base} \end{array}\right.$ base $\begin{array}{l} \Longleftrightarrow \text{libre maximale} \\ \Longleftrightarrow \text{génératrice minimal} \end{array}$

★★ ★ **théorème de la base incomplète** $\left\{\begin{array}{l} \text{toute famille libre se complète en une base,} \\ \text{tout sev admet un supplémentaire :} \end{array}\right.$ $\overbrace{\underbrace{v_1, v_2, ..., v_p}_{\text{base de } V}, \quad \underbrace{w_1, w_2, ..., w_q}_{\text{base d'un supplémentaire de } V}}^{\text{base de } E \text{ obtenue en complétant une base de } V}$

Tout ev de dimension n est isomorphe à K^n PAR LE CHOIX D'UNE BASE : $\left\{\begin{array}{ccc} E & \stackrel{\sim}{\longrightarrow} & \mathbf{K}^{\dim E} \\ x & \longmapsto & \left(\begin{array}{c} \text{coordonnées de } x \\ \text{dans la base choisie} \end{array}\right) \end{array}\right.$.

Deux ev sont isomorphes ssi ils ont même dimension : $E \simeq F \Longleftrightarrow \dim E = \dim F$.

V sev de $E \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \dim V \leq \dim E \\ \text{avec = ssi } V = E. \end{array}\right.$ $\quad \begin{array}{l} \dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W) \\ \text{cas particulier : } \dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W \end{array}$

$\operatorname{rg}(x_i) := \dim \operatorname{Vect}\{x_i\}$ $\left\{\begin{array}{c} \text{le rang de } (x_i) \text{ est le plus petit nombre de } x_k \\ \text{nécessaires pour engendrer tout } \operatorname{Vect}\{x_i\} \end{array}\right.$ $\quad \begin{array}{c} \operatorname{rg}\{x_1, ..., x_n\} = n \\ \text{ssi } (x_i) \text{ libre} \end{array}$

$\operatorname{rg} f := \dim \operatorname{Im} f$ ★★ ★ **formule du rang** : $\begin{array}{c} \operatorname{rg} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim E \\ \text{si } f : E \longrightarrow F \text{ (et pas } \dim F) \end{array}$ ★ en général, $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ NE SONT PAS SUPPLÉMENTAIRES !

$f : E \longrightarrow F$ est $\left\{\begin{array}{c} \text{nulle} \\ \text{injective} \\ \text{surjective} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \operatorname{rg} f = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ \dim E \\ \dim F \end{array}\right.$ $\quad \left\{\begin{array}{l} f : E \longrightarrow F \text{ isomorphisme} \\ \Longleftrightarrow \operatorname{rg} f = \dim E = \dim F \end{array}\right.$

★★★ si f est un ENDOmorphisme en dimension FINIE, alors f bijectif $\Longleftrightarrow f$ injectif $\Longleftrightarrow f$ surjectif ,

Parallèle $\left\{\begin{array}{c} \text{ALGÈBRE LINÉAIRE} \\ \text{COMBINATOIRE} \end{array}\right.$: $\begin{array}{cccccc} \text{ev} & \text{sev} & \text{dim} & \text{somme+} & (\text{directe} \oplus) & \text{supplémentaire} \\ \text{ensemble} & \text{partie} & \text{Card} & \text{union} \cup & (\text{disjointe } \amalg) & \text{complémentaire} \end{array}$