Dimension finie

mardi 26, mercredi 27 mars, mercredi 3 avril

Table des matières

Dans tout ce cours, E et F désignent deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbf{K} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$ et n dénote un entier naturel non nul.

1 Familles libres, familles génératrices

Définition (famille liée, libre, génératrice). *Soit $(e_1, e_2, ..., e_n) \in E^n$. On dit que la famille $(e_1, e_2..., e_n)$ est*

1. ***liée** si l'un des vecteurs e_i est combinaison linéaire des autres,* i. e. *si*
$$\exists i \in \{1, 2, ..., n\}\ ,\ e_i \in \underset{1 \leq j \leq n,\ j \neq i}{\mathrm{Vect}} \{e_j\}\ ;$$
2. ***libre** si la seule combinaison linéaire annulant les e_i est celle dont tous les coefficients sont nuls, i. e. si*
$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbf{K}^n,\quad \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0 \right)}_{\text{une } \textbf{\textit{relation de liaison}}} \Longrightarrow (\forall i \in \{1, 2, ..., n\}\ ,\ \lambda_i = 0)\ ;$$
3. ***génératrice** si elle engendre tous l'espace,* i. e. *si* $\mathrm{Vect}\{e_1, ..., e_n\} = E$ *ou encore si*
$$\forall x \in E,\ \exists (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbf{K}^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\ ;$$

Remarques.
Une famille est liée ssi elle n'est pas libre.
Une famille contenant le vecteur nul est liée.
Toute famille est génératrice de son Vect.
Un vecteur constitue une famille libre ssi il est non nul.
Deux vecteurs forment une famille liée ssi ils sont colinéaires.
Si $E = \mathbf{K}^2$, alors une famille (a, b) de *deux* vecteurs est liée ssi $\det(a, b) = 0$.
Si $E = \mathbf{K}^3$, alors une famille (a, b, c) de *trois* vecteurs est liée ssi $\det(a, b, c) = 0$.

Exemples.

1. La famille $\left(\binom{2}{6}, \binom{7}{21}\right)$ est liée dans $\mathbf{K}^2$ car $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 21 \end{vmatrix} = 2 \cdot 21 - 7 \cdot 6 = 42 - 42 = 0.$

   Sanity check : est nulle la combinaison linéaire $7\binom{2}{6} - 2\binom{7}{21}$.

2. Montrons que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right)$ est libre dans $\mathbf{K}^3$. Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbf{K}^2$ tel que $\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Les cotes donnent $\lambda=-2\mu$, d'où (en remplaçant dans les abscisses) $(-2\mu)+4\mu=0$, *i. e.* $\mu=0$, d'où $\lambda=(-2)\,0=0$.

Sanity check : les vecteurs $(1,2,3)$ et $(4,5,6)$ ne sont pas colinéaires.

3. La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre dans $\mathbf{K}^3$ car le déterminant $\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{matrix}1+1+1\\-(-1)-(-1)-1\end{matrix}=4$ est non nul.

4. La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\0\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-6\\-3\end{pmatrix}\right)$ est liée dans $\mathbf{K}^3$ car le déterminant $\begin{vmatrix}1&5&2\\2&0&-6\\0&-3&-3\end{vmatrix}=\begin{matrix}0+0+(-12)\\-(0)-(18)-(-30)\end{matrix}=0$ est nul.

Sanity check : le vecteur $\begin{pmatrix}5\\0\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-6\\-3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des deux autres.

Problème : comment a-t-on trouvé cette relation ? Essayons de *toutes* les trouver. Soit $x\in\mathbf{K}^3$, mettons $x=:(\lambda,\mu,\nu)$. On a alors les équivalences

$$\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}5\\0\\-3\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}2\\-6\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}\lambda+5\mu+2\nu=0\\2\lambda-6\nu=0\\-3\mu-3\nu=0\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}\lambda+5\mu+2\nu=0\\\lambda=3\nu\\\mu=-\nu\end{cases}\iff\begin{cases}(3\nu)+5(-\nu)+2\nu=0\\\lambda=3\nu\\\mu=-\nu\end{cases}\iff\begin{cases}0=0\\\lambda=3\nu\\\mu=-\nu\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}\lambda=3\nu\\\mu=-\nu\end{cases}\iff\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\\\nu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\nu\\-\nu\\\nu\end{pmatrix}\iff x=\nu\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$$
$$\overset{?}{\iff}\exists a\in\mathbf{K},\ x=a\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}\qquad\left(\begin{array}{l}\boxed{\Longrightarrow}\text{ poser } a:=\nu\\\boxed{\Longleftarrow}\text{ les cotes donnent } a=\nu,\\\text{d'où les égalités sur } \lambda \text{ et } \mu\end{array}\right)$$
$$\iff x\in\mathbf{K}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}\text{, ce qui répond au problème.}$$

5. Étudier la liberté de la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ de $\mathbf{K}^3$. On va déterminer

toutes les "relations de liaison". Soit $x \in \mathbf{K}^4$, disons $x =: (\lambda, \mu, \nu, \xi)$. On a alors les équivalences

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda + 3\mu + 7\nu + 6\xi = 0 \\ 2\mu - \nu + \xi = 0 \\ \nu = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = -3(\mu + 2\xi) \\ \xi = -2\mu \\ \nu = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -3(\mu + 2(-2\mu)) \\ \xi = -2\mu \\ \nu = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 9\mu \\ \xi = -2\mu \\ \nu = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\mu \\ \mu \\ 0 \\ -2\mu \end{pmatrix} \iff x = \mu \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \iff \exists a \in \mathbf{K},\ x = a \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\iff x \in \mathbf{K} \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Par conséquent, la famille étudiée est liée car il y a des relations de liaisons non triviales, par exemple $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 9 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2 Bases

Définition (base). *Soit $(e_1, e_2, ..., e_n) \in E^n$. On dit que la famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une **base** si elle est libre et génératrice,* i. e. *ssi*

$$\forall x \in E,\ \exists!\,(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbf{K}^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Exemples.

1. La famille (1) est une base de $\mathbf{K}$.
2. La famille $(1, i)$ est une base de $\mathbf{C}$ vu comme $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
3. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbf{K}^3$.
4. **(base canonique de $\mathbf{K}^n$).** Les vecteurs $(0, 0, ...0, 1, 0, 0, ..., 0)$ où le 1 est à la i-ième place lorsque i décrit $\{1, ..., n\}$ forment une base de $\mathbf{K}^n$, appelée sa ***base canonique***. Par exemple, la famille $(1, i)$ est la base canonique de $\mathbf{R}^2$.
5. Toute famille libre est une base de son Vect.

Propriété-définition (caractérisation fonctionnelle des caractères libres, générateurs et basiques, s.-e. v. des relations de liaison). *Soit $\mathcal{E} \in E^n$, mettons $\mathcal{E} =: (e_1, ..., e_n)$. Définissons $f_{\mathcal{E}}$: $\begin{cases} \mathbf{K}^n & \longrightarrow & E \\ (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \end{cases}$. Alors $f_{\mathcal{E}}$ est linéaire et*

$$\begin{cases} f_{\mathcal{E}} \text{ est injective ssi } \mathcal{E} \text{ est libre ;} \\ f_{\mathcal{E}} \text{ est surjective ssi } \mathcal{E} \text{ est génératrice ;} \\ f_{\mathcal{E}} \text{ est bijective ssi } \mathcal{E} \text{ est une base.} \end{cases}$$

Par ailleurs, l'image de $f_{\mathcal{E}}$ est $\operatorname{Vect} \mathcal{E}$ *et son noyau définit le sous-espace vectoriel des **relations de liaison** de $\mathcal{E}$.*

Définition (coordonnées et composantes dans une base). *Soient $x \in E$ et $\mathcal{B} =: (b_1, b_2, ..., b_n)$ une base de E. On peut considérer l'unique n-uplets de scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$.*

*Étant alors donné un entier $i \in \{1, 2, ..., n\}$, le scalaire λ_i est appelé la **i-ième coordonnée** (ou la **coordonnée selon** b_i) de x dans la base $\mathcal{B}$ et le vecteur $\lambda_i b_i$ est appelée la **i-ième composante** (ou la **composante selon** b_i) de x dans la base $\mathcal{B}$:*

$$x = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \underbrace{\overbrace{\lambda_i}^{i\text{-ième coordonnée}} \quad b_i}_{i\text{-ième composante}} + \cdots + \lambda_n b_n.$$

Exemples.
Dans la base canonique $(1, i)$ du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$, les coordonnées sont les parties réelle et imaginaire.
Dans la base canonique de $\mathbf{K}^3$, les coordonnées sont les abscisse, ordonnée et cote.

★ Étant donné un vecteur $e \in E$, l'application $x \mapsto \begin{pmatrix} \text{la coordonée} \\ \text{de } x \text{ selon } e \end{pmatrix}$ n'est pas bien définie : il faut préciser TOUTE LA BASE.

[dessin] Par exemple, supposons $E = \mathbf{K}^2$ et posons $u := \binom{1}{0}$, $v := \binom{1}{1}$ et $w := \binom{0}{1}$. Alors l'abscisse du vecteur v vaut 1 dans la base (u, w) et 0 dans la base (v, w). (Les familles considérées sont bien libre car de déterminants non nuls et un critère à venir montrera qu'il s'agit bien de bases du plan $\mathbf{K}^2$).

Proposition FONDAMENTALE **(détermination d'une application linéaire par l'image d'une base).** *Soit $\mathcal{B} =: (b_1, ..., b_n)$ une base de E. On a alors une bijection*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} L(E,F) & \longrightarrow & F^n \\ f & \longmapsto & (f(b_i)) \end{array} \right. \text{ de réciproque } \left\{ \begin{array}{ccc} F^n & \longrightarrow & L(E,F) \\ (f_i) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Intérêt : connaître une application linéaire, c'est connaître l'image d'une *base* (pas besoin des images de *tous* les vecteurs).

Exemple : l'application linéaire $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ 1 & \longmapsto & 0 \\ i & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$ définit la partie imaginaire.

Remarque (caractérisation basique des injectivité, surjectivité et bijectivité). On reprend les notations de la proposition ci-dessus et on invoque un $f \in L(E, F)$. On a alors les équivalences

$$\left\{ \begin{array}{lllll} f \text{ est} & \text{injective} & \text{ssi } f(b_i) & \text{est} & \text{libre;} \\ f \text{ est} & \text{surjective} & \text{ssi } f(b_i) & \text{est} & \text{génératrice;} \\ f \text{ est} & \text{bijective} & \text{ssi } f(b_i) & \text{est} & \text{une base.} \end{array} \right.$$

Proposition (cardinaux de familles libres, génératrices et basiques). *Soient $(\lambda, \beta, \gamma) \in \mathbf{N}^3$ et $\left\{ \begin{array}{ll} (\ell_1, \ell_2, ..., \ell_\lambda) \in E^\lambda & \text{une famille libre} \\ (b_1, b_2, ..., b_\beta) \in E^\beta & \text{une base} \\ (g_1, g_2, ..., g_\gamma) \in E^\gamma & \text{une famille génératrice} \end{array} \right.$. On a alors les comparaisons*

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \leq \beta \text{ avec égalité ssi } (\ell_i) \text{ est une base} \\ \gamma \geq \beta \text{ avec égalité ssi } (g_i) \text{ est une base} \end{array} \right. .$$

Intérêt : pour montrer qu'une famille est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre (plus facile qu'être génératrice) puis qu'elle a la bonne longueur.

Remarque (famille vide) : par convention, la famille vide est libre et $\operatorname{Vect} \emptyset = \{0\}$.

Exemple. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base $\mathbf{K}^3$ car elle est libre (*cf.* exemples plus haut) et a même longueur que la base canonique de $\mathbf{K}^3$. (On verra dans un autre cours comment effectivement décomposer un vecteur dans cette base.)

Corollaire. *Les bases sont les familles libres de longueur maximale ou encore les familles génératrices de longueur minimale.*

3 Dimension finie

Définition-proposition (dimension finie, droite, plan, hyperplan). *On dit que E est **de dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie. Alors E admet une base (finie) et toutes ses bases ont même longueur, appelée la **dimension** de E et notée $\dim E$ (ou $\dim_{\mathbf{K}} E$ s'il y a une ambiguïté sur le corps de base).*

*Une **droite (vectorielle)** est un espace vectoriel de dimension 1. Un **plan (vectoriel)** est un espace vectoriel de dimension 2. Lorsque E est de dimension finie, un **hyperplan** de E est un sous-espace vectoriel de dimension $(\dim E) - 1$.*

Remarque (famille vide). Le sous-espace nul est engendré par la famille vide qui est libre, donc $\dim \{0\} = 0$. Réciproquement, on montrerait que

$$E \text{ est nul ssi } E \text{ est de dimension finie nulle.}$$

Exemples. Soit I un intervalle infini de $\mathbf{R}$.

L'espace $\mathbf{K}^n$ est de dimension n vu que sa base canonique est de longueur n.

Soit $a \in C(I, \mathbf{K})$: alors l'ensemble $\{f \in C^\infty(I, \mathbf{K}) \ ; \ f' + af = 0\}$ est une droite vectorielle de $C^\infty(I, \mathbf{K})$ et est engendré par le vecteur e^{-A} où A désigne une primitive de a.

Soit $(a, b) \in C(I, \mathbf{K})^2$: alors l'ensemble $\{f \in C^\infty(I, \mathbf{K}) \ ; \ f'' + af' + bf = 0\}$ est un plan vectoriel de $C^\infty(I, \mathbf{K})$.

Le noyau de la forme linéaire $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^4 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{K} \\ (a, b, c, d) & \longmapsto & 5a - b + d \end{array} \right.$ est un hyperplan de $\mathbf{K}^4$. Pour le montrer, donnons-en une base (elle devra être de longueur $\left(\dim \mathbf{K}^4\right) - 1 = 3$). Soit $x =: (a, b, c, d) \in \mathbf{K}^4$. On a les équivalences

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker} \varphi \quad &\iff \quad b = d + 5a \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ d + 5a \\ c \\ d \end{pmatrix} \iff x = a \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \quad \exists (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbf{K}^3, \ x = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \boxed{\Longrightarrow} \text{ poser } (\lambda, \mu, \nu) := (a, c, d). \\ \boxed{\Longleftarrow} \text{ les abscisses donnent } \lambda = a, \\ \text{les cotes } \mu = c \text{ et les quatrièmes} \\ \text{coordonnées } \nu = d \end{array} \right) \\ &\iff \quad x \in \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Or il n'est pas dur de montrer que les trois vecteurs précédents forment une famille libre ; puisqu'ils engendrent leur Vect, ils en forment une base.

Remarque. Supposons E de dimension finie n. On a alors pour toute base $\mathcal{B} =: (b_i)$ un isomorphisme $\left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{K}^n \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i & \longmapsto & (\lambda_i) \end{array} \right.$ qui envoie la base $\mathcal{B}$ choisie sur la base canonique de $\mathbf{K}^n$.

★ Il n'y a PAS DE BASE CANONIQUE dans les espaces vectoriels (de prépa) à l'exception des $\mathbf{K}^n$, des $\mathbf{K}_n[X]$ et $\mathbf{K}[X]$ (polynômes) et des $M_{p,q}(\mathbf{K})$ (matrices).

Propriété (classification des e. v. de dimension finie). *Supposons E et F de dimension finie. Alors E et F sont isomorphes ssi ils ont même dimension.*

(analogue combinatoire : deux ensembles finis sont en bijection ssi ils ont même cardinal)

Sanity check : pour tout $(a, b) \in \mathbf{N}^2$, on a l'équivalence $\left(\mathbf{K}^a \text{ isomorphe à } \mathbf{K}^b\right) \iff (a = b)$.
(l'espace $\mathbf{K}^0$ est par convention réduit à l'espace nul $\{0\}$)

Théorème (dimension des s.-e. v). *Supposons E de dimension finie et soit V un sous-espace vectoriel de E. Alors V est de dimension finie et l'on a la comparaison*

$$\dim V \leq \dim E \text{ avec égalité ssi } V = E.$$

(analogue combinatoire : si A est un ensemble fini et X une partie de A, alors X est finie et l'on a $\operatorname{Card} X \leq \operatorname{Card} A$ avec égalité ssi $X = A$)

Intérêt : pour montrer une égalité entre espaces vectoriels, il suffit de montrer *une seule* inclusion puis l'égalité des dimensions (plus facile qu'une autre inclusion).

Corollaire (TRÈS UTILE). *Supposons E de dimension finie et soit $f \in L(E)$. On a alors les équivalences*

$$f \text{ est surjectif} \iff f \text{ est injectif} \iff f \text{ est bijectif} \iff f \text{ est un automorphisme.}$$

Application. Montrer que toute application linéaire de $\mathbf{K}^3$ vers $\mathbf{K}^2$ est de la forme $(x,y,z) \mapsto \binom{ax+bx+cy}{\alpha x+\beta y+\gamma y}$ pour un certain $\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^6$. Cela équivaut à la surjectivité de l'application

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^6 & \longrightarrow & L\left(\mathbf{K}^3, \mathbf{K}^2\right) \\ \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} & \longmapsto & (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} ax+bx+cy \\ \alpha x+\beta y+\gamma y \end{pmatrix} \end{array} \right. .$$

Montrons donc que Φ est linéaire, injective et que $\dim \mathbf{K}^6 = \dim L\left(\mathbf{K}^3, \mathbf{K}^2\right)$.

L'égalité des dimensions est aisée à obtenir : on verra plus loin dans le cours que $\dim L(E,F) = \dim E \times \dim F$ lorsque E et F sont de dimension finie, ce qui permet ici d'affirmer $\dim L\left(\mathbf{K}^3, \mathbf{K}^2\right) = 3 \times 2 = 6 = \dim \mathbf{K}^6$.

Montrons l'injectivité. Soit $\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} \Phi$. On a donc la nullité de $\begin{pmatrix} ax+bx+cy \\ \alpha x+\beta y+\gamma y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ \beta \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} c \\ \gamma \end{pmatrix}$ pour tout vecteur $(x,y,z) \in \mathbf{K}^3$. En particulier pour les vecteurs de la base canonique, on obtient les nullités de $\binom{a}{\alpha}$, $\binom{b}{\beta}$ et $\binom{b}{\gamma}$, ce qui conclut.

Montrons enfin que Φ est linéaire. Soient $(M,N) =: \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r & s & t \\ \rho & \sigma & \tau \end{pmatrix} \right) \in \left(\mathbf{K}^6\right)^2$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. L'égalité fonctionnelle $\Phi(\lambda M + N) = \lambda \Phi(M) + \Phi(N)$ revient à l'égalité des images en tout point. Soit donc $(x,y,z) \in \mathbf{K}^3$. On a alors

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda M + N)(x,y,z) &= \left[\Phi\left(\lambda \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r & s & t \\ \rho & \sigma & \tau \end{pmatrix}\right)\right](x,y,z) \\
&= \left[\Phi \begin{pmatrix} \lambda a + r & \lambda b + s & \lambda c + t \\ \lambda\alpha + \rho & \lambda\beta + \sigma & \lambda\gamma + \tau \end{pmatrix}\right](x,y,z) \\
&= x \begin{pmatrix} \lambda a + r \\ \lambda \alpha + \rho \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \lambda b + s \\ \lambda\beta + \sigma \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \lambda c + t \\ \lambda\gamma + \tau \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} ax+bx+cy \\ \alpha x + \beta y + \gamma y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} rx+sx+ty \\ \rho x + \sigma y + \tau y \end{pmatrix} \\
&= \lambda \left[\Phi \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}\right](x,y,z) + \left[\Phi \begin{pmatrix} r & s & t \\ \rho & \sigma & \tau \end{pmatrix}\right](x,y,z) \\
&= \left[\lambda\Phi(M) + \Phi(N)\right](x,y,z)\,, \ c.\ q.\ f.\ d..
\end{aligned}$$

Théorème (dit "de la base incomplète"). *On suppose E de dimension finie. Alors :*

1. *toute famille libre se complète en une base ;*
2. *tout sous-espace vectoriel. admet un supplémentaire.*
   (analogue combinatoire : toute partie d'un ensemble fini admet un complémentaire)

Démonstration du second point.

Soit V un sous-espace vectoriel de E. Alors V est de dimension finie par le théorème précédent, on peut donc en invoquer une base $(v_1, v_2, ..., v_p)$. Le premier point permet alors de compléter cette famille libre en une base de E, disons $(v_1, v_2, ..., v_p, w_1, w_2, ..., w_q)$ où $p + q = \dim E$. Montrons que $W := \operatorname{Vect}\{w_1, w_2, ..., w_q\}$ est un supplémentaire de V. On a déjà

$$\begin{aligned} V+W &= \operatorname{Vect}\{v_1,v_2,...,v_p\}+\operatorname{Vect}\{w_1,w_2,...,w_q\} \\ &= \left\{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i v_i\ ;\ (\lambda_k)\in\mathbf{K}^p\right\}+\left\{\sum_{j=1}^{q}\mu_j w_j\ ;\ (\mu_k)\in\mathbf{K}^q\right\} \\ &= \left\{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i v_i+\sum_{j=1}^{q}\mu_j w_j\ ;\ ((\lambda_k),(\mu_k))\in\mathbf{K}^p\times\mathbf{K}^q\right\} \\ &= \operatorname{Vect}\{v_1,v_2,...,v_p,w_1,w_2,...,w_q\} \\ &= E. \end{aligned}$$

Par ailleurs, un vecteur dans $V\cap W$ s'écrit $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i v_i=\sum_{j=1}^{q}\mu_j w_j$ et la liberté de la famille $(v_1,v_2,...,v_p,w_1,w_2,...,w_q)$ force la nullité de tous les λ_i d'une part et de tous les μ_j d'autre part, *c. q. f. d.*.

On retiendra de la construction précédente que

une base d'un supplémentaire d'un s.-e. v. $V\subset E$ est la complémentaire d'une base de V dans une base de E. $\underbrace{\overbrace{v_1,v_2,...,v_q}^{\text{base de } V},\overbrace{w_1,w_2,...,w_q}^{\text{base de } W}}_{\text{base de } E=V\oplus W}$

La construction précédente montre également que

$$\dim(V\oplus W)=\dim V+\dim W$$

pour tous sous-espace vectoriel V et W de dimension finie en somme directe. (analogue combinatoire : $\operatorname{Card}(A\amalg B)=\operatorname{Card}A+\operatorname{Card}B$ pour tous ensembles A et B finis disjoints). Que peut-on dire lorsque la somme n'est plus directe ? [dessin deux plans sécants de l'espace]

Théorème (formule de Grassmann). *Soient V et W deux sous-e. v de dimension finie de E. On a alors l'égalité*

$$\dim(V+W)=\dim V+\dim W-\dim(V\cap W).$$

(analogue combinatoire : si A et B sont deux ensembles finis, alors $\operatorname{Card}(A\cup B)=\operatorname{Card}A+\operatorname{Card}B-\operatorname{Card}(A\cap B)$)

Finissons par donner la dimension de $L(E,F)$ lorsque E et F sont de dimension finie. Supposons que ce soit le cas. On a vu que $L(E,F)$ est alors en bijection avec $F^{\dim E}$ (*via* le choix d'une base de E) et que F est isomorphe à $\mathbf{K}^{\dim F}$ (*via* le choix d'une base de F), ce qui montre que $L(E,F)$ est en bijection avec $\left(\mathbf{K}^{\dim F}\right)^{\dim E}$, lequel est en bijection avec $\mathbf{K}^{\dim E\times\dim F}$. Ainsi $L(E,F)$ est-il en bijection avec un espace vectoriel de dimension $\dim E\times\dim F$. On pourrait montrer que toutes ces bijections sont en fait des isomorphismes d'espaces vectoriels, ce qui permettrait de conclure :

$$\dim L(E,F)=\dim E\dim F.$$

En particulier, lorsque $F=E$, on en déduit

$$\dim L(E)=(\dim E)^2.$$

4 Rang

Question : y a-t-il un lien entre les dimensions des noyau et image d'une application linéaire ? La réponse est oui. Plus précisément, ces deux dimensions sont complémentaires à la dimension de l'espace de départ.

Théorème. *Supposons E de dimension finie. Soit $f\in L(E,F)$. Alors $\operatorname{Im}f$ est de dimension finie et on a l'égalité*

$$\dim\operatorname{Im}f+\dim\operatorname{Ker}f=\dim E.$$

★★ Ce théorème *ne dit pas* que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires – mais seulement que leurs dimensions sont complémentaires. Par exemple, la partie imaginaire sur le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$ a pour noyau et image la droite $\mathbf{R}$, donc ces derniers *ne sont pas en somme directe* (mais leurs dimensions ont bien pour somme $2 = \dim_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$).

MNEMO ($\dim E$ et pas $\dim F$) Agrandir F ne change pas l'action de f, donc ne change pas le membre de gauche : par conséquent, le membre de droite *ne* peut *pas* être $\dim F$.

Exemple 1. Posons $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^3 & \longrightarrow & \mathbf{K}^2 \\ (a,b,c) & \longmapsto & \binom{2a-b+c}{a-2c} \end{array} \right.$. Le lecteur vérifiera qu'il s'agit bien d'une application linéaire. (Au passage, cela peut aider la vérification d'observer l'égalité $f(a,b,c) = a\binom{2}{1} - b\binom{1}{0} + c\binom{1}{-2}$ pour tout $(a,b,c) \in \mathbf{K}^3$.) Puisque $\operatorname{Im} f$ contient les vecteurs $f(1,0,0) = \binom{2}{1}$ et $f(0,1,0) = \binom{1}{0}$ qui forment une famille libre de $\mathbf{K}^2$ (leur déterminant vaut $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$), l'image $\operatorname{Im} f$ contient le plan qu'ils engendrent, donc est de dimension ≥ 2. Or on a par ailleurs l'inclusion $\operatorname{Im} f \subset \mathbf{K}^2$, d'où l'on tire $\dim \operatorname{Im} f \leq \dim \left(\mathbf{K}^2\right) = 2$. On a par conséquent l'égalité $\operatorname{Im} f = \mathbf{K}^2$ (en particulier f est surjective). Le noyau est donc de dimension $\dim \mathbf{K}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 3 - 2 = 1$: calculons-le. Soit $(a,b,c) \in \mathbf{K}^3$. On a les équivalences

$$(a,b,c) \in \operatorname{Ker} f \iff \begin{pmatrix} 2a-b+c \\ a-2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{c} b = 2a+c \\ a = 2c \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} b = 5c \\ a = 2c \end{array} \right. \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \\ 5c \\ c \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \exists \lambda \in \mathbf{K}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

ce qui montre que $\operatorname{Ker} f$ est la droite engendrée par le vecteur $(2,5,1)$ (qui est bien de dimension 1).

Exemple 2. Posons $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^2 & \longrightarrow & \mathbf{K}^4 \\ (a,b) & \longmapsto & \begin{pmatrix} a-b \\ 5a \\ -3b \\ a+2b \end{pmatrix} \end{array} \right.$. Le lecteur vérifiera qu'il s'agit bien d'une application linéaire. On observera que $g(a,b) = a \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ pour tout $(a,b) \in \mathbf{K}^2$, ce qui montre que $\operatorname{Im} g$ contient les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ (qui forment une famille libre car ne sont pas colinéaires), donc contient le plan qu'ils engendrent. Comme à l'exemple 1, on en déduit que $\dim \operatorname{Im} f = 2$, d'où l'on déduit $\dim \operatorname{Ker} g = \dim \mathbf{K}^2 - \dim \operatorname{Im} g = 2 - 2 = 0$, ce qui montre que g est injective. Vérifions-le. Soit $(a,b) \in \operatorname{Ker} g$. Les ordonnées et cotes donnent $\binom{5a}{-3b} = \binom{0}{0}$, d'où $(a,b) = (0,0)$.

Exemple 3. Soit φ une forme linéaire non nulle sur E (supposé de dimension finie). Alors $\operatorname{Im} \varphi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}$, donc est de dimension $\leq \dim \mathbf{K} = 1$, donc est bien de dimension nulle (mais alors $\operatorname{Im} \varphi$ est le sous-espace vectoriel nul et φ est nul, ce qui est exclu) ou bien de dimension 1. On en déduit $\dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim E - \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim E - 1$, ce qui montre que $\operatorname{Ker} \varphi$ est un hyperplan. (On verra la réciproque en T. G..)

Définition (rang). Supposons E de dimension finie.
*On appelle **rang** d'une famille finie de vecteurs de E la dimension de leur* Vect *:*

$$\operatorname{rg}(e_1, e_2, ..., e_n) := \dim \operatorname{Vect} \{e_1, e_2, ..., e_n\}.$$

*On appelle **rang** d'une application linéaire de E vers F la dimension de son image :*

$$\operatorname{rg} f := \dim \operatorname{Im} f.$$

Le théorème en début de section se réécrit alors sous la formule suivante, appelée **formule du rang** :

$$\operatorname{rg} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim E.$$

Par exemple, les applications linéaires des exemples 1 et 2 sont toutes deux de rang 2.

Remarque (rang et longueur). Le rang d'une famille est toujours plus petit que sa longueur, avec égalité ssi la famille est libre. On pourrait en déduit que rajouter un vecteur à une famille a pour effet : ou bien d'augmenter le rang de 1 (si le vecteur ajouté n'est pas engendrée par la famille de départ) ou bien (sinon) de conserver le rang.

Proposition (caractérisation des isomorphismes par le rang). *Supposons E et F de dimension finie et soit $f \in L(E, F)$. Alors f est un isomorphisme ssi* $\operatorname{rg} f = \dim E = \dim F$.

Plus précisément, montrons en exercice les équivalences suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} f \text{ est nulle} & \iff & \operatorname{rg} f = 0 \\ f \text{ est injective} & \iff & \operatorname{rg} f = \dim E \\ f \text{ est surjective} & \iff & \operatorname{rg} f = \dim F \end{array} \right. .$$

On a déjà les équivalences

$$\operatorname{rg} f = 0 \iff \dim \operatorname{Im} f = 0 \iff \operatorname{Im} f = \{0\} \iff \forall y \in \operatorname{Im} f,\ y = 0 \iff \forall x \in E,\ f(x) = 0 \iff f = 0.$$

Ensuite, invoquons une base (b_i) de E et remarquons que

$$\operatorname{rg}(f(b_i)) = \dim(\operatorname{Vect} f(b_i)) \underset{\text{linéaire}}{\overset{\text{car } f \text{ est}}{=}} \dim(f(\operatorname{Vect} b_i)) = \dim f(E) = \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f\,;$$

cela nous permet de dérouler les équivalences

$$f \text{ injective} \iff f(b_i) \text{ libre} \iff \operatorname{rg}(f(b_i)) = \text{longueur}(f(b_i)) \iff \operatorname{rg} f = \dim E.$$

Enfin, puisque $\operatorname{Im} f \subset F$, on aura égalité ssi les dimensions sont égales, d'où les équivalences

$$f \text{ surjective} \iff \operatorname{Im} f = F \iff \dim \operatorname{Im} f = \dim F \iff \operatorname{rg} f = \dim F.$$