Variations

(résumé)

vrai **local**ement <=> vrai **au voisinage d'**un point
vrai **global**ement <=> vrai **sur tout l'ensemble** source
$f : I \longrightarrow \mathbf{K}$ est ***continue*** (ou C^0) *en* $a \in \overline{I}$ si $f(a_n) \longrightarrow f(a)$ pour toute suite $(a_n) \longrightarrow a$.
$f : I \longrightarrow \mathbf{K}$ est de classe C^k si $f, f', f'', ..., f^{(k)}$ sont définies sur I et sont C^0. Notation : $C^k(I, \mathbf{K})$.
$f : I \longrightarrow \mathbf{K}$ est de classe C^∞ si f est de classe C^k pour tout k. Notation : $C^\infty(I, \mathbf{K})$.
Formule Leibniz : $[f \times g]^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} f^{(p)} \times g^{(n-p)}$.
Stabilité de C^k et de C^∞. Être C^k (resp. C^∞) est stable par $+, \cdot, \times, \circ$ (et min et max si $k = 0$).
EG $C^k(I, \mathbf{K})$ sev de $\mathbf{K}^I$ $I \xrightarrow[C^k]{f} J \xrightarrow[C^k]{g} \mathbf{K} \Longrightarrow g \circ f\ C^k$ (même si $k = \infty$)
dérivable $\Longrightarrow$ continue $\Longrightarrow$ bornée localement. ($\bigstar C^0 \not\Rightarrow$bornée globalement !$\bigstar$)
$\bigstar\bigstar\bigstar$ f CONTINUE sur un SEGMENT $\Longrightarrow$ f est BORNÉE et atteint ses bornes
Toutes les fonctions usuelles sont C^0 (sauf partie entière), la plupart sont C^∞
(contreEG : $|\cdot|$ et $\sqrt{\cdot}$ pas dér en 0, arcsin et arccos pas dérivables en ± 1)
Prolongement par continuité : $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ admet un prolongement } C^0 \text{ en } a \\ \iff f \text{ admet une limite en } a \end{array} \right.$. Eg $\frac{\sin t}{t}$ et $t \ln t$ en 0.
Prolongement de la dérivée : $\left\{ \begin{array}{l} f' \text{ prolongeable par continuité en } a \\ \Longrightarrow f'(a) \text{ fait sens et vaut } \lim_a f'. \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Les suites } \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{K} \text{ ne peuvent s'étudient qu'}\textbf{au voisinage de } \infty \textbf{ exclusivement} \\ \text{les fonctions } I \longrightarrow \mathbf{K} \text{ peuvent s'étudier } \textbf{au voisinage de n'importe quel point de } \overline{I}. \end{array} \right.$
La plupart des définitions et propriétés sur les suites et limites s'appliquent aux fonctions :
DEF constante, bornée, minorée, majorée, périodique, (strictement) (dé)croissante, (strictement) monotone, supremum, infimum, maximum, minimum, extremum, tendre vers un $\lambda \in \mathbf{K}$, tendre vers $\pm\infty$.
PROP^T $f \xrightarrow{a} (\lambda \neq 0) \Longrightarrow (f \neq 0$ au voisinage de $a)$ $\begin{array}{c} o \xrightarrow{a} 0 \text{ et } f \text{ bornée} \\ \text{au voisinage de } a \end{array} \Longrightarrow of \xrightarrow{a} 0$
THM passage de $\leq$ à la limite, théorèmes gendarmes, théorème limite monotone.
NOUVEAU extremum ***local*** compositions des limites ($\begin{array}{c} f \xrightarrow{a} \square \\ g \xrightarrow{\square} \lambda \end{array} \Longrightarrow g \circ f \xrightarrow{a} \lambda$)

$\bigstar\bigstar\bigstar$ GROS THÉORÈMES, valides si $\mathbf{K} = \boxed{\mathbf{R}}$:
TVI : $\left\{ \begin{array}{l} f(a) f(b) < 0 \\ f\ C^0 \text{ sur } [a, b] \end{array} \right. \Longrightarrow f$ s'annule sur $]a, b[$. **TVI** bis : $\left\{ \begin{array}{l} I \text{ intervalle} \\ f\ C^0 \text{ sur } I \end{array} \right. \Longrightarrow f(I)$ intervalle.
$\left\{ \begin{array}{l} f : I \longrightarrow \mathbf{R} \text{ continue} \\ \text{et strictement montone} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f^{-1} : f(I) \longrightarrow I \text{ fait sens, est continue et} \\ \text{strictement monotone (de même sens que } f) \end{array} \right.$
$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ dérivable en } a \in \mathring{I} \\ f(a) \text{ extremum local} \end{array} \right. \Longrightarrow f'(a) = 0$ ($\bigstar$faux si $a \in I$: $\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Id}_{|[18,42]} \text{ min en } 18 \\ \mathrm{Id}'_{|[18,42]} = 1 \neq 0 \end{array} \right.$)
Rolle $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ continue sur } [a, b] \\ f \text{ dérivable sur }]a, b[\\ f(a) = f(b) \end{array} \right. \Longrightarrow f'$ s'annule sur $]a, b[$ (corde horizontale $\Longrightarrow$ tangente horizontale)
formule des accroissements finis $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ continue sur } [a, b] \\ f \text{ dérivable sur }]a, b[\end{array} \right. \Longrightarrow \begin{array}{c} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(s) \\ \text{pour un } s \in]a, b[\end{array}$ ($\exists$tangente parallèle à toute corde))
inégalité des accroissements finis $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ continue sur } [a, b] \\ f \text{ dérivable sur }]a, b[\end{array} \right. \Longrightarrow \left| \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right| \leq \sup_{]a,b[} |f'|$ (IAF valide même si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$)

Suites récurrentes : $\left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_n \longrightarrow \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow f(\lambda) = \lambda$ SI f EST CONTINUE EN λ.
Pour montrer $a_n \longrightarrow (\lambda = f(\lambda))$, utiliser l'**IAF** en écrivant $|a_{n+1} - \lambda| = |f(a_n) - f(\lambda)|$,
d'où $|a_n - \lambda| \leq (\sup_{?I?} |f'|)^n |a_0 - \lambda|$; choisir alors l'intervalle $?I?$ pour que $\sup_{?I?} |f'| < 1$.