Variations

mercredi 20 mars, lundi 25 mars

Table des matières

Dans tout le chapitre, la lettre $\mathbf{K}$ désignera l'un des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Rappels (égalité fonctionnelle, polynôme de fonctions). Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, α et β deux fonctions de $\mathbf{K}^I$ et λ un scalaire.

On rappelle l'égalité entre les fonctions α et β :

$$\alpha = \beta \overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} \forall t \in I,\ \alpha(t) = \beta(t).$$

On définit l'action des fonctions $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ et $\lambda\alpha$ sur tout réel $t \in I$ par

$$\begin{aligned}[]
[\alpha+\beta](t) &:= \alpha(t)+\beta(t), \\
[\alpha\beta](t) &:= \alpha(t)\beta(t) \text{ et} \\
[\lambda\alpha](t) &:= \lambda\alpha(t).
\end{aligned}$$

Notation (intérieur et adhérence d'un intervalle) : pour tout intervalle J non vide de $\overline{\mathbf{R}}$, on notera

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{J} &:= \,]\inf J, \sup J[\text{ (appelé l'}\textbf{\textit{intérieur}}\text{ de } J) \text{ et} \\
\overline{J} &:= [\inf J, \sup J] \text{ (appelé l'}\textbf{\textit{adhérence}}\text{ de } J).
\end{aligned}$$

Ainsi l'intérieur et l'adhérence d'un intervalle sont respectivement un *intervalle ouvert* et un *segment* (de $\overline{\mathbf{R}}$).

Introduction. Le chapitre sur les suites étudiait les fonctions de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{K}$ et tout particulièrement ce qui se passait à partir d'un certain rang suffisamment élevé, *i. e.* ce qui se passait "au voisinage de" ∞. En remplaçant l'intervalle "discret" $\mathbf{N} = [0,\infty[\cap\mathbf{Z}$ par l'intervalle "continu" $[0,\infty[$, nous pouvons encore étudier les fonctions de $[0,\infty[$ vers $\mathbf{K}$ ainsi que leur comportement "au voisinage de" ∞ mais nous pourrons également les étudier "au voisinage de" tout point du segment $[0,\infty]$. Et plus généralement en remplaçant l'intervalle $[0,\infty[$ par n'importe quel intervalle infini de $\mathbf{R}$.

Pour tout le chapitre, on fixe un intervalle I infini de $\mathbf{R}$ et une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{K}$.
(analogue discret : l'intervalle $\mathbf{N}$ et une suite $a : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{K}$)

1 Vocabulaire fonctionnel

Vocabulaire topologique ("au voisinage de", local, global). Avec les suites, souvent seul importait le comportement "au voisinage de" ∞. Avec les fonctions, il sera également pertinent de ne regarder que ce qui se passe "autour d'"un point adhérent à I (comme ∞ était adhérent à $[0, \infty[$). Pour ce faire, il sera commode, lorsque E est un énoncé à un symbole libre tel que $E(t)$ fasse sens pour tout $t \in I$, de dire que :

1. (si $\infty \in \overline{I}$) *E est vrai **au voisinage de** ∞ si E est vrai sur l'intersection $]A, \infty[\cap I$ pour un certain $A > 0$;*
2. (si $-\infty \in \overline{I}$) *E est vrai **au voisinage de** $-\infty$ si E est vrai sur l'intersection $]-\infty, A[\cap I$ pour un certain $A > 0$;*
3. (où a est un réel donné) *E est vrai **au voisinage de** a si E est vrai sur l'intersection $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap I$ pour un certain $\varepsilon > 0$.*

Dans ces trois cas, on dira que E est vrai ***localement*** (au voisinage du point considéré).

De manière très différente, on dira que E est vrai ***globalement*** (sur tout I) si E est vérifié en tout point de I.

Toutes les définitions des suites sont à reprendre en remplaçant l'intervalle source $\mathbf{N}$ par I (et la suite concernée par f). Il n'y a donc rien de nouveau à apprendre dans la liste apparemment indigeste suivante, à l'exception des notions *locales* décrites en toute fin.

*f est **constante** si $\exists C \in \mathbf{K},\ \forall t \in I,\ f(t) = C$.*
*f est **bornée** si $\exists M > 0,\ \forall t \in I,\ |f(t)| \leq M$.*
*f est T-**périodique** (où $T > 0$ est un réel donné) si $I = \mathbf{R}$ et si $\forall t \in \mathbf{R},\ f(t + T) = f(t)$.*

On suppose à présent $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.
Si g est une autre fonction de $\mathbf{R}^I$, on notera

$$f \leq g \overset{\text{déf.}}{\iff} \forall t \in I,\ f(t) \leq g(t),$$
$$f < g \overset{\text{déf.}}{\iff} \forall t \in I,\ f(t) < g(t)$$

(★ la négation de $f \leq g$ n'est pas $f < g$).

*f est **majorée** si $\exists M > 0,\ \forall t \in I,\ f(t) \leq M$.*
*f est **minorée** si $\exists m < 0,\ \forall t \in I,\ f(t) \geq m$.*
*f est **croissante** si $\forall (x, y) \in I^2,\ x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$.*
*f est **décroissante** si $\forall (x, y) \in I^2,\ x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$.*
*f est **monotone** si f est croissante ou si f est décroissante.*
*f est **strictement croissante** si $\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$.*
*f est **strictement décroissante** si $\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$.*
*f est **strictement monotone** si f est strictement croissante ou si f est strictement décroissante.*
On note $\begin{cases} \sup_I f := \sup\{f(t)\ ;\ t \in I\} \\ \inf_I f := \inf\{f(t)\ ;\ t \in I\} \end{cases}$ (dans $\overline{\mathbf{R}}$) et (s'ils font sens) $\begin{cases} \max_I f := \max\{f(t)\ ;\ t \in I\} \\ \min_I f := \min\{f(t)\ ;\ t \in I\} \end{cases}$.

Soit $t_0 \in I$. On dit que :
*f est **maximale** en t_0 (ou que t_0 est un **maximum** de f) si $\forall t \in I,\ f(t) \leq f(t_0)$;*
*f est **minimale** en t_0 (ou que t_0 est un **minimum** de f) si $\forall t \in I,\ f(t) \geq f(t_0)$;*
*f est **extrémale** en t_0 si f est maximale en t_0 ou si f est minimale en t_0 ;*
(★ nouveau) *t_0 est un **maximum local** de f si on a la comparaison $f(t) \leq f(t_0)$ au voisinage de t_0 (ici t est un symbole libre) ;*
(★ nouveau) *t_0 est un **minimum local** de f si on a la comparaison $f(t) \geq f(t_0)$ au voisinage de t_0 (ici t est un symbole libre) ;*
(★ nouveau) *t_0 est un **extremum local** de f si t_0 est un maximum local ou si t_0 est un minimum local.*
Parfois, on parlera d'extremum *global* pour désigner un extremum afin de bien différencier ce dernier d'un extremum *local*.

Exemples. [pleins de dessins]
On a les comparaisons $|\cos| \leq 1$, $|\sin| \leq 1$, $|\arctan| < \frac{\pi}{2}$, $|\text{th}| < 1$, $\exp > 0$ et $\text{ch} \geq 1$.

Les fonctions cos, sin, arctan et th sont bornées. tan est bornée au voisinage de 0 mais n'est pas bornée au voisinage de $\frac{\pi}{2}$. exp est bornée au voisinage de $-\infty$ mais n'est pas bornée au voisinage de ∞.

$\frac{1}{\mathrm{Id}}$ décroît strictement sur chaque intervalle où elle est définie, est bornée au voisinage de $\pm\infty$ mais n'est pas bornée au voisinage de 0.

cos et sin ne sont pas monotones.

ln croît strictement, n'est pas bornée au voisinage de 0 ni au voisinage de ∞.

sin et cos admettent une infinité d'extrema locaux (qui sont aussi des extrema globaux)

$\frac{\sin}{\mathrm{Id}}$ (prolongée par 1 en 0) admet un infinité d'extrema locaux mais un seul extremum global (qui est un maximum).

2 Tendances & limites

Avec les suites, on pouvait regarder la limite en un point "limite" de l'intervalle source $\mathbf{N}$, à savoir en ∞ exclusivement. Avec les fonctions, il y a aura trois sortes de points "limites" (tous dans $\overline{I}$) :

$$-\infty, \text{ un réel donné}, \infty.$$

De plus, lorsque le point limite a est réel, on distinguera deux cas supplémentaires selon le côté de a où se trouve l'argument :

à gauche, à droite.

En croisant avec les trois sortes de tendances possibles (vers $-\infty$, vers un scalaire donné, vers ∞), nous obtiendrons au total $(3+2)\times 3 =$*quinze* définitions, récapitulées dans un tableau en fin de section. Au lieu de les lister une par une, voyons plutôt comment les retrouver.

2.1 Convergence (vers 0, vers un scalaire donné)

(point limite ∞) Commençons par rendre "continue" la convergence d'une suite en reprenant la définition séquentielle et en y remplaçant l'intervalle $\mathbf{N}$ par I (et la suite (u_n) par la fonction f). [dessin] Encore une fois, il n'y a absolument rien de nouveau à apprendre.

Définition-propriété (convergence en ∞). *Supposons $\infty \in \overline{I}$. On dit que f **tend vers** 0 **en** ∞ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \ \underbrace{\forall t \in I}_{\text{très souvent sous-entendu}},\ t \geq A \Longrightarrow |f(t)| \leq 0.$$

On note alors $f \overset{\infty}{\longrightarrow} 0$ ou $f(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$. (analogue discret : $a_n \longrightarrow 0$ si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0,\ n \geq N \Longrightarrow |u_n| \leq 0$)

*Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. On dit que f **tend vers** λ **en** ∞ si $|f-\lambda| \overset{\infty}{\longrightarrow} 0$. On note alors $f \overset{\infty}{\longrightarrow} \lambda$ ou $f(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$.* (analogue discret : $a_n \longrightarrow \lambda$ si $|a_n - \lambda| \longrightarrow 0$)

Exemples. [dessins] On a les tendances $e^{-t} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\frac{1}{t^\alpha} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{1}{(\ln t)^\alpha} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout réel $\alpha > 0$.

(point limite 0 ou réel) Reprenons à présent dans le cours des suites la motivation de la définition de la convergence vers 0 :

"*u_n tend vers 0 si,*
étant donnée une précision $\varepsilon > 0$ aussi petite que voulu,
on a $|u_n| \leq \varepsilon$ pour n assez grand".

Cherchons à l'adapter en se demandant comment formaliser "$f(t)$ tend vers 0 <u>lorsque t tend vers 0</u>" (et non plus lorsque t tend vers ∞). Calquons :

"*$f(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0 si,*
étant donnée une précision $\varepsilon > 0$ aussi petite que voulu,
on a $|f(t)| \leq \varepsilon$ pour t assez proche de 0".

Il reste à formaliser la fin "*pour t assez proche de* 0", ce qui sera aisé en adaptant la formalisation "$\exists N > 0, ..., \ n \geq N \Longrightarrow$" de "*pour n assez grand*" en "$\exists \delta > 0, ..., \ |t| \leq \delta \Longrightarrow$". [dessin]

Enfin, on pourra remplacer le 0 source par n'importe quel autre réel de $\overline{I}$ à l'aide d'une translation de l'argument, comme on a déjà plus haut remplacé le 0 but par un scalaire quelconque à l'aide d'une translation de l'image. [dessin]

Définition (convergence en un réel). *Supposons $0 \in \overline{I}$. On dit que f **tend vers** 0 **en** 0 si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \underbrace{\forall t \in I}_{\substack{\text{très souvent} \\ \text{sous-entendu}}}, \ |t| \leq \delta \Longrightarrow |f(t)| \leq \varepsilon.$$

*Soient $a \in \overline{I} \cap \mathbf{R}$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. On dit que f **tend vers** λ **en** a si $t \mapsto f(t-a) - \lambda$ tend vers 0 en 0,* i. e. *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ |t-a| \leq \delta \Longrightarrow |f(t) - \lambda| \leq \varepsilon.$$

On note alors $f \xrightarrow{a} \lambda$ ou $f(t) \xrightarrow{t \to a} \lambda$.

Mnémo (ordre δ-source ε-but). Le choix de δ comme symbole muet n'est pas anodin. En effet, la comparaison $|f(t) - \lambda| \leq \varepsilon$ concerne les *images* (donc l'ensemble *but*) et celle $|t-a| \leq \delta$ concerne les *arguments* (donc l'ensemble *source*) : en vertu de l'ordre canonique "source->but", il serait confusant de ne pas choisir pour δ une lettre venant *avant* ε (ce qui est bien le cas) (et non η comme on le trouve dans certains manuels). Par ailleurs, δ fera penser à "**d**ifférence" (suffisamment petite) tout comme ε fera penser à "**e**rreur" (aussi petite que voulue).

Exemples. [dessin] On a les tendances $t^n \xrightarrow{t \to 0} 0$ pour tout entier $n > 0$, $\sin t \xrightarrow{t \to 0} 0$, $|t|^\alpha \xrightarrow{t \to 0} 0$ pour tout réel $\alpha > 0$, $\operatorname{th} t \xrightarrow{t \to 0} 0$, $\tan t \xrightarrow{t \to 0} 0$, $t \ln t \xrightarrow{t \to 0} 0$ et $t^\alpha (\ln t)^\beta \xrightarrow{t \to 0} 0$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}_+^{*2}$.

Soit $a \in \overline{I}$ réel. Il arrive que le comportement local de f en a ne soit pas le même des deux côtés de a, par exemple si f est la partie entière. On distinguera alors volontiers deux éventuelles tendances en restreignant f à droite de a ou à gauche de a. [dessin]

Définition (convergence à droite, à gauche). *Soit a un réel dans $\overline{I}$ et λ un scalaire.*
*On dit que f **tend vers** λ **en** a **à droite** si $f_{|[a,\infty[\cap I} \xrightarrow{a} \lambda$,* i. e. *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ a \leq t \leq a + \delta \Longrightarrow |f(t) - \lambda| \leq \varepsilon.$$

On note alors $f \xrightarrow{a^+} \lambda$ ou $f(t) \xrightarrow{t \to a^+} \lambda$.
*On dit que f **tend vers** λ **en** a **à gauche** si $f_{|]-\infty,a]\cap I} \xrightarrow{a} \lambda$,* i. e. *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ a - \delta \leq t \leq a \Longrightarrow |f(t) - \lambda| \leq \varepsilon.$$

On note alors $f \xrightarrow{a^-} \lambda$ ou $f(t) \xrightarrow{t \to a^-} \lambda$.

Exemple. [dessin] On a les tendances $\lfloor t \rfloor \xrightarrow{t \to 0^+} 0$ et $\lfloor t \rfloor \xrightarrow{t \to 0^-} -1$.

2.2 Tendances vers $\pm\infty$

Passons à présent aux tendances vers $\pm\infty$. Cela impose d'avoir $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

Lorsque le point limite vaut ∞, il suffit de recopier la définition de la tendance d'une suite réelle vers $\pm\infty$ en remplaçant $\mathbf{N}$ par I. Par exemple, on notera

$$f \xrightarrow{\infty} -\infty \overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} \forall B < 0, \ \exists A > 0, \ t \geq A \Longrightarrow f(t) \leq B.$$

Des exemples usuels sont les tendances $t^\alpha \xrightarrow{t \to \infty} \infty$ pour tout réel $\alpha > 0$, $e^t \xrightarrow{t \to \infty} \infty$ et $\ln t \xrightarrow{t \to \infty} \infty$.

Quand le point limite vaut $-\infty$, on adapte aisément le symbolisme "$\exists A > 0, \ t \geq A$" codant le français "*pour t assez proche de* ∞" en "$\exists A < 0, \ t \leq A$" pour signifier "*pour t assez proche de* $-\infty$". Par exemple, on écrira

$$f \xrightarrow{-\infty} \infty \overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} \forall B > 0, \ \exists A < 0, \ t \leq A \Longrightarrow f(t) \geq B.$$

Des exemples usuels sont les tendances $t^n \overset{t \to -\infty}{\longrightarrow} (-1)^n \infty$ pour tout entier $n > 0$

Lorsque, enfin, le point limite est un réel a, on "copie-collera" les symboles "$\exists \delta > 0,\ |t - a| \leq \delta$" en lieu et place de "$\exists A > 0,\ t \geq A$" ou "$\exists A < 0,\ t \leq A$". Ainsi, on pourra écrire

$$f \overset{18}{\longrightarrow} -\infty \overset{\text{déf.}}{\iff} \forall B < 0,\ \exists \delta > 0,\ |t - 18| \leq \delta \Longrightarrow f(t) \leq B.$$

Si l'on souhaite préciser une latéralité dans la tendance vers a, on remplacera la comparaison "$|t - 18| \leq \delta$" par l'encadrement "$a - \delta \leq t \leq a$" ou "$a - \delta \leq t \leq a$", ce qui permettra par exemple de noter

$$f \overset{42^-}{\longrightarrow} \infty \overset{\text{déf.}}{\iff} \forall B > 0,\ \exists \delta > 0,\ 42 - \delta \leq t \leq 42 \Longrightarrow f(t) \geq B.$$

Des exemples usuels sont les tendances $\frac{1}{t} \overset{t \to 0^+}{\longrightarrow} \infty$, $\tan t \overset{t \to \frac{\pi}{2}^+}{\longrightarrow} -\infty$, $\ln t \overset{t \to 0}{\longrightarrow} -\infty$, $\operatorname{argth} t \overset{t \to -1}{\longrightarrow} -\infty$.

Remarque (ordre A-source B-but). Pour décrire ce qui se passait dans un voisinage de 0 (à la source comme au but), nous avions utilisé les lettres δ (source) et ε (but) dans l'ordre alphabétique. Suivant la même cohérence, pour décrire ce qui se passe dans un voisinage de $\pm\infty$ (à la source comme au but), nous avons utilisé ici les lettres A (source) et B (but) dans le même ordre alphabétique.

Nous n'avons pas explicité les quinze définitions attendues. Le résumé suivant, exemplifié par ce qui précède, devrait cependant suffire pour les reconstituer

2.3 Résumé, limites, convergence, divergence

Soient λ un scalaire et a un réel.

On note α l'un des cinq symboles "source" ∞, $-\infty$, a, a^+ ou a^- (étant entendu que $\alpha \in \overline{I}$ dans les trois premiers cas et que $a \in \overline{I} \cap \mathbf{R}$ dans les trois derniers).

On note Λ l'un des trois symboles "but" λ, ∞ ou $-\infty$ (étant entendu que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ si $\Lambda = \pm\infty$).

On souhaite expliciter la définition de la tendance $f \overset{\alpha}{\longrightarrow} \Lambda$ suivant les valeurs de (α, Λ), ce qui revient à remplir le tableau suivant :

but \ source	$\overset{\infty}{\longrightarrow}$	$\overset{-\infty}{\longrightarrow}$	$\overset{a}{\longrightarrow}$	$\overset{a^+}{\longrightarrow}$	$\overset{a^-}{\longrightarrow}$
$\longrightarrow \lambda$					
$\longrightarrow \infty$					
$\longrightarrow -\infty$					

.

Selon la ligne, la définition cherchée est de la forme suivante :

ligne	définition
$\longrightarrow \lambda$	$\forall \varepsilon > 0,\ \cdots\ \lvert f(t) - \lambda \rvert \leq \varepsilon$
$\longrightarrow \infty$	$\forall B > 0,\ \cdots\ f(t) \geq B$
$\longrightarrow -\infty$	$\forall B < 0,\ \cdots\ f(t) \leq B$

où les $\cdots$ sont à remplacer selon la colonne (la quantification "$\forall t \in I$" est omise)

$\overset{\infty}{\longrightarrow}$	$\exists A > 0,\ t \geq A \Longrightarrow$
$\overset{-\infty}{\longrightarrow}$	$\exists A < 0,\ t < A \Longrightarrow$
$\overset{a}{\longrightarrow}$	$\exists \delta > 0,\ \lvert t - a \rvert \leq \delta \Longrightarrow$
$\overset{a^+}{\longrightarrow}$	$\exists \delta > 0,\ a \leq t \leq a + \delta \Longrightarrow$
$\overset{a^-}{\longrightarrow}$	$\exists \delta > 0,\ a - \delta \leq t \leq a \Longrightarrow$

.

Lorsque $f \overset{\alpha}{\longrightarrow} \Lambda$, le symbole Λ est appelée la (on admet son unicité) ***limite*** de f ***en*** α et est noté $\lim_\alpha f$ ou $\lim_{t \to \alpha} f(t)$.

Si f admet une limite finie en α, *i. e.* si $\lim_\alpha f$ fait sens et est un scalaire (ni ∞ ni $-\infty$), on dit que f ***converge en*** α ; dans le cas contraire, on dit que f ***diverge*** en α.

Exemples. exp, sin et ln divergent en ∞, $\frac{1}{\mathrm{Id}}$ diverge en 0^+ comme en 0^-, $\lfloor \mathrm{Id} \rfloor$ diverge en tout entier et converge partout ailleurs, $t \mapsto \sin \frac{1}{t}$ diverge en 0^+ comme en 0^-.

2.4 Propriétés

Nous allons reprendre toutes les propriétés des suites en remplaçant le point limite ∞ "source" par n'importe point de $\overline{I}$, avec pour seule nouveauté la "composition des limites". Le lecteur est donc encouragé à lire ce qui suit à la lumière du cours sur les suites.

Fixons un point $a \in \overline{I}$ et un élément Λ dans $\mathbf{K} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Propriétés (opérations usuelles sur les limites). *Soient $g : I \longrightarrow \mathbf{K}$ et $M \in \mathbf{K} \cup \{-\infty, \infty\}$. Sous réserve que les limites suivantes fassent sens dans $\overline{\mathbf{R}}$, on aura les tendances suivantes dès que $\left\{ \begin{array}{l} f \xrightarrow{a} \Lambda \\ g \xrightarrow{a} M \end{array} \right.$:*

1. $|f| \xrightarrow{a} |\Lambda|$;
2. $\frac{1}{f} \xrightarrow{a} \frac{1}{\Lambda}$;
3. $f + g \xrightarrow{a} \Lambda + M$;
4. $fg \xrightarrow{a} \Lambda M$;
5. $\frac{f}{g} \xrightarrow{a} \frac{\Lambda}{M}$.

(★ nouveau) Propriété (composition des limites). *Soient $\Box$ un point de $\overline{\mathbf{R}}$ et g une fonction définie sur un intervalle dont l'adhérence contient $\Box$. On a alors l'implication*

$$\left\{ \begin{array}{l} f \xrightarrow{a} \Box \\ g \xrightarrow{\Box} \Lambda \end{array} \right. \Longrightarrow g \circ f \xrightarrow{a} \Lambda.$$

Exemple. Soit $\varepsilon \neq 0$. On a les égalités et tendance

$$\frac{1 - \cos \varepsilon}{\varepsilon^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \boxed{\frac{\varepsilon}{2}}}{\boxed{\frac{\varepsilon}{2}}} \right)^2 \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2} (1)^2 = \frac{1}{2}$$

(déjà traité dans le cours de calcul différentiel simple en bas de page 2).

Remarque (abus d'écriture). Dans cet exemple, on a invoqué un $\varepsilon \in \mathbf{R}^*$ mais on écrit ensuite $\xrightarrow{\varepsilon \to 0}$, ce qui suppose de "désinvoquer" ε afin de pouvoir le considérer comme symbole muet dans la tendance $\xrightarrow{\varepsilon \to 0}$. Comme pour les suites, cette abus est monnaie courante.

Propriétés (lien entre fonctions convergentes, bornées, tendant vers 0).

1. *Si f converge en a, alors f est bornée au voisinage de a.*
2. *Le produit d'une fonction convergente par une fonction tendant vers 0 (en un même point) tend vers 0.*
3. *Si $f \xrightarrow{a} \Lambda$ et si Λ est* NON NUL, *alors f reste non nulle au voisinage de a (et, plus précisément, est minorée au voisinage de a en module par un certain réel strictement positif).*

Exemples. Les fonctions $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ et $t \mapsto t \ln t$ admettent une limite finie en 0, donc sont bornées au voisinage de 0. La fonction $t \mapsto e^{it^2} (t - 7)^{42}$ est le produit d'une fonction bornée (on a $\forall t \in \mathbf{R}$, $\left| e^{it^2} \right| = 1$) par une fonction tendant vers 0 en 7, d'où la tendance $e^{ix^2} (x - 7)^{42} \xrightarrow{x \to 7} 0$.

Propriété (limite des "suites extraites"). *Supposons $f \xrightarrow{a} \Lambda$. On a alors la tendance $f(a_n) \longrightarrow \Lambda$ pour toute suite (a_n) tendant vers a.*

(on pourra retenir "$\lim f(a_n) = f(\lim a_n)$")

Exemple. *Montrer que* sin *n'a pas de limite en ∞.* (analogue discret : la suite $(-1)^n$ diverge)

Supposons par l'absurde que sin tende vers quelque chose en ∞. Puisque les suites $(2\pi n)$ et $(2\pi n + \pi)$ (analogue des extractions $(2n)$ et $(2n+1)$ tendent toutes deux vers ∞, les "suites extraites" $(\sin(2\pi n))$ et $\sin(2\pi n + \pi)$ tendent également vers $\lim_\infty \sin$; or la première vaut constamment 1 et tend donc vers 1, tandis que la seconde tend vers -1.

Propriétés (limites et ordre). On suppose ici $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. [trois dessins]

1. **(les comparaisons prennent le large)** *Soient* $g : I \longrightarrow \mathbf{K}$ *et* $M \in \mathbf{K} \cup \{-\infty, \infty\}$*. Si on a les tendances* $\left\{ \begin{array}{l} f \xrightarrow{a} \Lambda \\ g \xrightarrow{a} M \end{array} \right.$ *et la comparaison* $f \leq g$*, on aura alors la comparaison* $\Lambda \leq M$ *(dans* $\overline{\mathbf{R}}$*).*
2. **(théorème d'encadrement)** *Soient* φ *et* Φ *deux fonction de* $\mathbf{K}^I$ *telles que* $\varphi \leq f \leq \Phi$*. Alors les tendances de* φ *et* Φ *vers* Λ *impliquent celle de* f *vers le même* Λ*.*
3. **(tendences et monotonie)** *Si* f *croît au voisinage à gauche (resp. droite) de* a*, on aura alors la tendance* $f \xrightarrow{a^-} \sup_{]-\infty,a[\cap I} f$ *(resp.* $f \xrightarrow{a^-} \inf_{]a,\infty[\cap I} f$*).*

Exemple. La comparaison $\sin t \leq t \leq \tan t$ pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ permet de montrer la tendance $\frac{\sin\theta}{\theta} \xrightarrow{\theta \to 0} 1$ (déjà traité dans le cours de calcul différentiel simple en milieu de page 2).

3 Continuité

Étant donnés deux points situés de part et d'autre d'une droite fixée reliés par une "courbe continue", peut-on affirmer que la courbe rencontrera la droite ? [dessin] Le bon sens nous dit que cela est évident. Chercher à formaliser mathématiquement "courbe continue" puis à *démontrer* cette "évidence" (★ théorème central de ce cours ★) doit nous éveiller à la différence entre le bon sens pratique et la mathématique.

3.1 Définitions & propriétés

Intuitivement, la continuité peut être conçue comme l'absence de *discontinuités*. Sans vouloir jouer sur les mots, nous pensons ces dernières plus élémentaires que leur opposé et d'abord plus intuitif : visualiser à un "saut", une "cassure". Au niveau du graphe d'une fonction, on pensera par exemple les "marches" du graphe de $t \mapsto \lfloor t \rfloor$ comme autant de discontinuités : la fonction ne tend pas vers la même "valeur" des deux côtés. Mais il existe des discontinuités plus "chaotiques" : visualiser un signal qui oscille de plus en plus vite et de plus en plus amplement (à l'instar de $t \mapsto \frac{1}{t} \sin \frac{1}{t}$ au voisinage de 0). Une façon de pallier ces discontinuités, *i. e.* d'empêcher les sauts ou les oscillations trop amples, serait de forcer notre fonction à "converger" en le point considéré, *i. e.* à y admettre une limite, ce qui est la définition d'usage. (*exercice* : montrer que, si f admet une limite en un point donné $a \in I$, alors cette limite vaut nécessairement $f(a)$)

Définition (continuité).
Soit $a \in I$ *: on dit que* f *est* ***continue*** *en* a *si* $f \xrightarrow{a} f(a)$*.*
On dit que f *est* ***continue*** *(sur* I*) si* f *est continue en tout point de* I*.*
L'ensemble des fonctions continues sur I *à valeurs dans* $\mathbf{K}$ *sera noté* $C(I, \mathbf{K})$ *ou* $C^0(I, \mathbf{K})$*.*

Exemples. Les polynômes, $|\mathrm{Id}|$, les fonctions transcendante et leurs réciproques.
Contre-exemple. Les parties entières $\lfloor \mathrm{Id} \rfloor$ et $\lceil \mathrm{Id} \rceil$.

Propriété. *Toute fonction continue en un point est bornée au voisinage de ce point.*
Exemple. $\frac{1}{\mathrm{Id}}$ prolongée par n'importe quoi en 0 ne sera jamais continue en 0.

★ La continuité *globale* n'assure pas d'être *globalement* bornée : penser aux fonctions tan et argth.

En pratique, la continuité sert surtout à légitimer une chose que l'on a très souvent envie de faire (et que l'on n'a pas toujours droit de faire !), à savoir intervertir deux limites :

pour justifier une tendance $f(a_n) \longrightarrow f(a)$ *lorsque* $a_n \longrightarrow a$*,*
il suffit de montrer que f *est continue en* a*.*

Application (limite de suites récurrentes et points fixes). *Soit (a_n) une suite de $I^{\mathbf{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbf{N},\ a_{n+1} = f(a_n)$. Si (a_n) converge et si f est continue en $\lim a_n$, alors cette dernière limite est un point fixe de f.*

Exemple. *Soit $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite telle que $\left\{ \begin{array}{c} u_0 = \frac{1}{18} \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n \end{array} \right.$. Montrer qu'elle tend vers ∞.*

(*bonus* : la fonction $t \mapsto t^2 + t$ stabilise $\mathbf{R}_+$ qui contient $\frac{1}{18}$, d'où l'existence de (u_n).) Vu que $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, la suite (u_n) croît ; ou bien elle tend vers ∞ (et on a terminé), ou bien elle converge. Dans ce dernier cas, sa limite ℓ est point fixe de la fonction polynomiale (donc continue sur tout $\mathbf{R}$) $t \mapsto t^2 + t$, d'où l'égalité $\ell = \ell^2 + \ell$, *i. e.* $\ell = 0$; or la comparaison $(u_n) \geq (u_0)$ (découlant de la croissance de (u_n)) donne par passage à la limite $\ell \geq \frac{1}{18}$, ce qui est une contradication.

Propriétés usuelles (stabilité de la continuité). *Soit $g : I \longrightarrow \mathbf{K}$. Supposons f et g continues. Alors sont continues les fonctions :*

1. *$f_{|J}$ (pour tout intervalle infini $J \subset I$) ;*
2. *$|f|$;*
3. *λf (pour tout scalaire λ) ;*
4. *$f \pm g$;*
5. *fg ;*
6. *$\frac{f}{g}$ (si g ne s'annule pas) ;*
7. *$\max\{f, g\}$ et $\min\{f, g\}$.*

Corollaire (structure de $C(I, \mathbf{K})$). *L'ensemble $C(I, \mathbf{K})$ est un s.-e. v. de $\mathbf{K}^I$ stable par multiplication (et par passage aux module, minimum et maximum).*

Propriété (continuité & composition). *Soit J un intervalle infini réel contenant $\operatorname{Im} f$. Soit $g : J \longrightarrow \mathbf{K}$. Si f et g sont continues, alors la composée $g \circ f$ l'est aussi.*

Exemple. La fonction $\frac{e^{|\sin|} + \sqrt{\text{sh}} + \text{argth}^{42}}{(\ln(1-\cos))^{18}}$ est continue sur $\mathbf{R}_+ \setminus 2\pi\mathbf{Z}$ (*i. e.* là où elle est définie).

Lorsque l'on prolonge une fonction continue en levant une indétermination, il est pertinent de se demander si le prolongement obtenu reste continu. Le théorème suivant donne une condition simple (c'est la définition de la continuité en remplaçant le point $a \in I$ par un point de $\overline{I}$).

Théorème (prolongement continu). *Soit $a \in \overline{I}$. Alors f admet un prolongement continu en a ssi f admet une limite finie en a.*

Exemples. Les fonctions $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ (continue sur $\mathbf{R}^*$) et $t \mapsto t \ln t$ (continue sur $\mathbf{R}_+^*$) se prolongent chacune continûment en 0.

3.2 Théorèmes fondamentaux (cas réel)

On suppose à présent $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Les deux théorèmes qui suivent sont sans doute les plus importants de l'analyse de sup, avec l'inégalité des accroissements finis de la section suivante.

★★★ Théorème (des valeurs intermédiaires). *Soit $(a, b) \in I^2$. Alors :*

1. *si $f(a) f(b) < 0$, alors f s'annule sur $]a, b[$;* [dessin]
2. *l'image continue d'un intervalle est un intervalle (*i. e. *$f(I)$ est un intervalle) ;*
3. *l'image continue d'un segement est un segment (*i. e. *$f([a, b])$ est un segment).*

Exemple 1. *On suppose* $\operatorname{Im} f \subset [0,1] = I$ *et* f *continue. Montrer que* f *admet un point fixe.* [dessin]
On cherche un zéro de la fonction $\delta := f - \mathrm{Id}$, qui est continue (comme différence de fonctions continues). Puisque $\delta(0) = f(0) - 0 \geq 0$ et $\delta(1) = f(1) - 1 \leq 0$, le premier point ci-dessus conclut dès que les comparaisons précédentes sont strictes ; sinon l'une est une égalité et on a directement terminé (0 ou 1 est fixe).

Exemple 2. *Montrer que* $t \mapsto \frac{18}{t} + \frac{42}{t-1}$ *s'annule sur* $]0,1[$.
La fonction donnée tend vers ∞ en 0^+, donc prend des valeurs strictement positives au voisinage de 0. De même, elle tend en 1^- vers $-\infty$, donc prend des valeurs strictement négatives au voisinage de 1. Cette fonction étant par ailleurs continue sur $]0,1[$, le théorème des valeurs intermédiaires (point 1) permet de conclure.

★★★ Corollaire. *Toute fonction* CONTINUE *sur un* SEGMENT *y est bornée.*

Exemple. *Supposons* $I = \mathbf{R}$ *et* f *18-périodique. Montrer que* f *est bornée.*
Le corollaire nous dit que f est bornée sur $[0,18]$: notons M un majorant de $f_{|[0,18]}$. Soit $t \in I$. Montrons $|f(t)| \leq M$, ce qui conclura. Notons $k := \left\lfloor \frac{t}{18} \right\rfloor$ (qui est un entier relatif). Alors le réel $t - 18k$ d'une part a (par 18-périodicité de f) même image par f que t, d'autre part se réécrit $18\left(\underbrace{\frac{t}{18} - \left\lfloor \frac{t}{18} \right\rfloor}_{\in[0,1]}\right)$ et tombe donc dans $[0,18]$, d'où la comparaison $|f(t)| = |f(t-18k)| \leq M$, *c. q. f. d.*.

★★★ Théorème (de la "bijection monotone"). *Supposons* f *continue et strictement monotone. Alors* f *induit une bijection* $f^{-1} : I \longrightarrow f(I)$ *de réciproque continue, strictement montone et de même sens de variation.*

Applications 1. Nous avons utilisé ce théorème à maintes reprises pour définir les réciproques des fonctions trigonométriques (circulaires & hyperboliques).

Application 2. *Montrer que l'équation* $\sum_{n=1}^{18} x^n = 1$ *d'inconnue* $x \in \mathbf{R}_+$ *admet une unique solution.*
La fonction Id étant continue, strictement croissante et strictement positive, ses puissances le sont également, donc la somme de ses 18 premières puissances satisfait les hypothèses du théorème précédent. Puisque cette somme envoit 0 sur 0 et tend en ∞ vers ∞, elle induit une bijection de $[0,\infty[$ sur $[0,\infty[$, donc atteint une unique fois sur $\mathbf{R}_+$ le réel 1.

4 Dérivabilité

4.1 Rappels

On renvoit au cours de calcul différentiel simple pour la motivation de la définition suivante, les dérivées usuelles et la dérivée logarithmique.

Définition (dérivabilité). *Soit* $a \in I$. *On dit que* f *est* ***dérivable*** *en* a *si la fonction* $t \mapsto \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ *converge en* a.
Comme pour les tendances, on pourra distinguer dérivabilité *à droite* et dérivabilité *à droite*. Par exemple, la valeur absolue n'est pas dérivable en 0 mais l'y est à droite et à gauche. On notera, si cela fait sens, $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$) la dérivée de f en a à droite (resp. à gauche).

Propriété (dérivabilité et continuité). *Toute fonction dérivable est continue.*

Théorème (de la "limite de la dérivée"). *Soient* $a \in I$ *et* $\Lambda \in \mathbf{K} \cup \{-\infty, \infty\}$. *Supposons* f' *définie sur* $I \setminus \{a\}$ *et tendant en* a *vers* Λ. *On a alors la tendance* $\frac{f(t)-f(a)}{t-a} \overset{t \to a}{\longrightarrow} \Lambda$.
En particulier, si Λ est fini, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \lim_a f'$.

Exemple. *Montrer que* $t \mapsto t^3 \sin \frac{1}{t}$ *(prolongée continûment) admet une tangente horizontale en l'origine.*

Notre fonction étant bornée par $|\mathrm{Id}|^3$ qui tend en 0 vers 0, son prolongement envoit 0 sur 0. Vu par ailleurs la tendance lorsque $t \to 0$ (où $t \neq 0$ est un réel invoqué)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(t^3 \sin\frac{1}{t}\right) = \underbrace{3t}_{\longrightarrow 0}\underbrace{\sin\frac{1}{t}}_{\text{borné}} + \underbrace{t^3\left(-\frac{1}{t^2}\right)}_{\longrightarrow 0}\underbrace{\cos\frac{1}{t}}_{\text{borné}} \longrightarrow 0,$$

le théorème précédent permet de conclure.

Rappel (fonctions de classe C^k). Soit $k \in \mathbf{N}$. On dit que f est de classe C^k si les dérivées $f, f', f'', ..., f^{(k)}$ sont définies sur tout I et sont C^0. On dit que f est C^∞ si f est C^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Propriété (stabilité de la continuité d'ordre supérieur). Soit $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$.
L'ensemble $C^k(I, \mathbf{K})$ est un s.-e. v. de $\mathbf{K}^I$ stable par produit.
La composée de deux fonctions C^k chacune sur un intervalle reste C^k (si elle fait sens).

★ Contrairement à la continuité, être C^k (pour un certain $k \geq 1$) n'est pas stable par passage au module, ni par min ou max : la fonction Id est C^∞ mais $|\mathrm{Id}|$ est n'est pas dérivable en 0.

4.2 Théorèmes fondamentaux (cas réel)

On suppose ici $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.
Comme le théorème des valeurs intermédiaires, les théorèmes qui suivent sont des "évidences" graphiques (qui néanmoins nécessiteraient chacun une preuve en bonne et due forme).

Lemme (dérivée et *extrema*). *Soit $a \in \mathring{I}$ où f est dérivable et localement extrémale. Alors $f'(a) = 0$.* [dessin]

★ le point a doit être *intérieur* à I : pour un contre-exemple, prendre $f = \mathrm{Id}$ définie sur $I = [18, 42]$ et $a \in \{18, 42\}$.
★ la réciproque est fausse, comme le montre la fonction $t \mapsto t^3$ en l'origine.

★★★ Théorème (de Rolle). *Soient a et b distincts dans I. On suppose* $\left\{\begin{array}{c} f \text{ continue sur } [a,b] \\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\\ f(a) = f(b) \end{array}\right.$.
Alors f' s'annule sur l'intervalle (non ordonné) $]a,b[$. [dessin]
(Intuitivement, la présence d'une corde horizontale assure celle d'une tangente horizontale.)

★ Le théorème de Rolle devient faux si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$: considérer la fonction $t \mapsto e^{it}$ sur le segment $[0, 2\pi]$.

Application. *Supposons f dérivable sur I et s'y annulant 18 fois. Montrer que f' s'annule 17 fois.*
L'énoncé nous permet d'invoquer dix-huit zéros de f : écrivons les dans l'ordre usuel $z_0 < z_1 < \cdots < z_{17}$. Soit $i \in [1, 17]$ entier. f vérifier les hypothèses du théorème de Rolle sur $[z_{i-1}, z_i]$, donc s'annule en un certain $\zeta_i \in]z_{i-1}, z_i[$. Vu par ailleurs les comparaisons "entrelacées" $\zeta_1 < z_1 < \zeta_2 < z_2 < \cdots < z_{16} < \zeta_{17} < z_{17}$, nous pouvons affirmer que tous les ζ_i sont distincts, d'où 17 zéros pour f' comme désiré.

★★★ Théorème (égalité des accroissements finis). *Soient a et b distincts dans I. On suppose* $\left\{\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [a,b] \\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\end{array}\right.$. *Alors il y a un $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.* [dessin]
(Comme pour Rolle, aucun des intervalles n'est ordonné)
(Intuitivement, il y a une tangente parallèle à toute corde donnée.)

★★★ Corollaire (inégalité des accroissements finis). *Soient a et b distincts dans I. On suppose* $\left\{\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [a,b] \\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\end{array}\right.$. *Alors la pente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est majorée par $\sup_{]a,b[}|f'|$.*
(Comme pour Rolle, aucun des intervalles n'est ordonné)

Cette (in)égalité est très utile pour étudier des suites récurrentes $a_{n+1} = f(a_n)$ convergeant vers un point fixe de f où $|f'| < 1$.

Exemple 1. [dessin] La fonction $\rho := \sqrt{6+\mathrm{Id}}$ stabilise $\mathbf{R}_+$ qui contient 42, d'où l'existence d'une unique suite (a_n) positive telle que $\left\{\begin{array}{c} a_0 = 42 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} \end{array}\right.$. Le dessin suggère que (a_n) décroît et tend vers 3. Ce dernier réel est bien fixe par ρ puisque $\rho(3) = \sqrt{9} = 3$. Montrons que $a_n \longrightarrow 3$. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a la comparaison

$$|a_{n+1} - 3| = |\rho(a_n) - \rho(3)| \leq |\rho'(s_n)|\,|a_n - 3| \text{ pour un certain réel } s_n \in \left]3, a_n\right[\ ;$$

or pour tout $t \geq 3$ on a $|\rho'(t)| = \left|\frac{1}{2\sqrt{6+t}}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{6+3}} = \frac{1}{6}$, d'où l'on dire $|a_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{6}|a_n - 3|$, *i. e.* $6^{n+1}|a_{n+1} - 3| \leq 6^n |a_n - 3|$. Ceci montre la décroissance de la suite $\left(6^k |a_k - 3|\right)$, d'où la comparaison $6^n |a_n - 3| \leq 6^0 |a_0 - 3|$ et la tendance $|a_n - 3| \leq \frac{39}{6^n} \longrightarrow 0$, ce qui conclut.

(*bonus* : montrer la décroissance suggérée)

Exemple 2. [dessin] La fonction $\sigma := 3 - \sqrt{\frac{\mathrm{Id}}{2}}$ stabilise $[0,3]$ (elle décroît, envoie tout en-desous de 3 et envoie 3 sur $3 - \sqrt{\frac{3}{2}} \geq 3 - \sqrt{\frac{8}{2}} = 3 - 2 \geq 0$) qui contient 1, d'où l'existence d'une unique suite $(b_n) \in [0,3]^{\mathbf{N}}$ telle que $\left\{\begin{array}{c} b_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ b_{n+1} = 3 - \sqrt{\frac{b_n}{2}} \end{array}\right.$. Le dessin suggère que (b_n) tend "en tournant" vers 2. Ce dernier réel est bien fixe par σ puisque $\sigma(2) = 3 - \sqrt{\frac{2}{2}} = 2$. Montrons que $b_n \longrightarrow 2$. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a la comparaison

$$|b_{n+1} - 2| = |\sigma(b_n) - \sigma(2)| \leq |\sigma'(s_n)|\,|b_n - 2| \text{ pour un certain réel } s_n \in \left]2, b_n\right[\ ;$$

or pour tout $t > 0$ on a $|\sigma'(t)| = \left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2\sqrt{t}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$ mais cette grandeur n'est pas bornée. Afin de continuer comme dans l'exemple 1, on va se restreindre à un intervalle plus petit où l'on pourra majorer $|\sigma'|$. Par exemple, puisque σ envoie 3 sur 1 et 1 sur 3, sa décroissance montrer qu'elle stabilise $[1,3]$, d'où $s_n \geq 1$ et $|\sigma'(s_n)| \leq \frac{1}{\sqrt{2 s_n}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. On en déduit les comparaisons $|b_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}|b_n - 2|$, *i. e.* $\sqrt{2}^{n+1}|b_{n+1} - 2| \leq \sqrt{2}^n |b_n - 2|$. Ceci montre la décroissance de la suite $\left(\sqrt{2}^k |b_k - 2|\right)$, d'où la comparaison $\sqrt{2}^n |b_n - 2| \leq \sqrt{2}^0 |b_0 - 2|$ et la tendance $|b_n - 2| \leq \frac{1}{2^n} \longrightarrow 0$, ce qui conclut.

Remarque. L'inégalité des accroissements finis reste valide lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, ce qui permet d'appliquer la méthode précédente aux suites récurrentes complexes.