Applications linéaires

(résumé)

$f : E \longrightarrow F$ est ***linéaire*** si $\begin{cases} f(\lambda x) = \lambda f(x) \\ f(x+y) = f(x) + f(y) \end{cases}$, çàd ssi $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.
ÊTRE LINÉAIRE $\Longleftrightarrow$ PRÉSERVER LES COMBINAISONS LINÉAIRES.
SI f EST LINÉAIRE, ON A TOUJOURS $f(0) = 0$

morphisme d'ev : f linéaire de E vers F çàd $f \in L(E, F)$;
endomorphisme : on reste dans $E = F$ çàd $f \in L(E)$;
isomorphisme : f bijectif ;
automorphisme : AUTO = ENDO + ISO çàd $f \in GL(E)$ (***groupe linéaire***) ;
forme linéaire : $f(x)$ est un NOMBRE, çàd $F = \mathbf{K}$.

Applications linéaires usuelles.

1. Les homothéties $x \mapsto \lambda x$ sont des endomorphismes.
2. La dérivation des fonctions $f \mapsto f'$ est linéaire.
3. La limite est une forme linéaire $(a_n) \mapsto \lim a_n$ sur les suites convergentes.
4. Les parties réelle et imaginaire sont des formes linéaires sur $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$.
5. Le produit scalaire est une forme linéaire en chacune de ses deux variables.
6. L'évaluation des fonctions $f \mapsto f(a_0)$ est une forme linéaire.
7. L'intégration des fonctions $f \mapsto \int_{a_0}^{b_0} f(x)\, dx$ est une forme linéaire.
8. Le produit vectoriel est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ en chacune de ses deux variables.
9. ★Une application constante $x \mapsto x_0$ n'est jamais linéaire (sauf si $x_0 = 0$).
10. ★Une translation $x \mapsto x + x_0$ n'est jamais linéaire (sauf si $x_0 = 0$).
11. ★Un polynôme n'est presque jamais une forme linéaire, sauf si tous ses monômes sont de degré 1 (pas de constantes (degré 0), ni de carrés (degré 2) ni de cubes (degré 3)...)

Stabilité de la linéarité. Les applications linéaires sont stables par combinaison linéaire (çàd par + et $\cdot$), par composition $\circ$ et (si bijectives) par réciproque :
$\underbrace{\lambda}_{\text{scalaire}} \underbrace{f}_{\text{linéaire}} + \underbrace{g}_{\text{linéaire}} \circ \underbrace{h}_{\text{linéaire}}$ est linéaire $\underbrace{f}_{\text{linéaire}}$ bijectif $\Longrightarrow f^{-1}$ linéaire.
Nouveau : dans $L(E)$, $\circ$ se distribue sur + On peut donc développer/factoriser dans $L(E)$ où le produit est la composition. ★ le produit $\circ$ n'est pas commutatif !

Noyau (kernel) : $x \in \operatorname{Ker} f \Longleftrightarrow f(x) = 0$. Si f linéaire, $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des sev.
Injectivité : ★★★ *Si f linéaire, alors f injective* $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. ★★★
Équations linéaires. Si $f(x_0) = y_0$ avec f linéaire, alors $f(x) = y_0 \Longleftrightarrow \exists k \in \operatorname{Ker} f, x = x_0 + k$.

Projecteurs et symétries linéaires.
• Dans $E = A \oplus B$, la ***projection*** p sur A parallèlement à B envoie $\underbrace{a}_{\in A} + \underbrace{b}_{\in B}$ sur a.

Alors $p^2 = p$, $A = \underbrace{\operatorname{Im} p}_{\text{vecteurs fixés par } p}$ et $B = \operatorname{Ker} p$. ★ Retenir$E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.
Réciproque : si $f^2 = f$ dans $L(E)$, alors f est la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$.

• Dans $E = A \oplus B$, la ***symétrie*** s par rapport à A parallèlement à B envoie $\underbrace{a}_{\in A} + \underbrace{b}_{\in B}$ sur $a - b$.

Alors $s^2 = \mathrm{Id}$, $A = \underbrace{\operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id})}_{\text{vecteurs fixés par } s}$ et $B = \underbrace{\operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id})}_{\text{vecteurs "anti-fixés" par } s}$. ★ Retenir $E = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id})$.
Réciproque : si $f^2 = \mathrm{Id}$ dans $L(E)$, alors f est la symétrie p. r. à $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$ parallèl^t à $\operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})$.