Applications linéaires

mercredi 27 février, lundi 18 mars

Table des matières

Dans tout le chapitre, la lettre $\mathbf{K}$ désignera l'un des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
On fixe pour toute la suite E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$.

1 L'espace $L(E,F)$

Nous avons vu qu'un morphisme de groupes *préserve la structure* des groupes, au sens où il préserve la loi du groupe, son neutre ainsi que son inversion.

De manière analogue, un morphisme d'espaces vectoriels va préserver la structure d'espace vectoriel, laquelle est donnée d'une part par le groupe additif sous-jacent, d'autre part par la loi de composition externe. Cela doit éclaircir la définition suivante.

Définition (application linéaire, forme linéaire, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme). *On appelle* ***morphisme***[1] *d'espaces vectoriels ou* ***application linéaire*** *de E vers F tout morphisme de groupes additif de E vers F qui "préserve" les l. c. e. de E et F. En d'autres termes, on dit qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est* ***linéaire*** *si*

$$\begin{cases} \forall (a,b) \in E^2,\ f(a+b) = f(a) + f(b) \\ \forall (\lambda, a) \in \mathbf{K} \times E,\ f(\lambda a) = \lambda f(a) \end{cases}.$$

L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $L(E,F)$ ou $\mathcal{L}(E,F)$.

Soit $f \in L(E,F)$.

Si $F = \mathbf{K}$, on dit que f est une ***forme linéaire****.*

Si $E = F$, on dit que f est un ***endomorphisme***[2] *de l'espace vectoriel E. L'ensemble $L(E,E)$ des endomorphisme de E est noté $L(E)$ ou $\mathcal{L}(E)$.*

Si f est bijective, on dit que f est un ***isomorphisme***[3] *d'espaces vectoriels.*

Si f est un endomorphisme bijectif, on dit que f est un ***automorphisme***[4] *de l'espace vectoriel E.*

Remarque très importante. Soit $f : E \longrightarrow F$ linéaire. Puisque f est un morphisme de groupes additifs, f envoie le neutre de E sur celui de F, ce qui s'écrit $f(0) = 0$. On peut aussi remplacer dans l'hypothèse λ par 0, ce qui donne $f(0a) = 0f(a)$, *i. e.* $f(0) = 0$. Quel que soit le chemin choisi, on doit retenir que

une application linéaire envoie toujours 0 sur 0.

---

[1] rappelons que *morphisme* est une abréviation de *homomorphisme* qui signifie littéralement *même forme* et que l'on doit penser comme *qui préserve la structure*

[2] Le préfixe -*endo* signifie *en dedans*. On le retrouve dans *réaction endothermique* ou dans *système endocrinien.*

[3] Le préfixe -*iso* signifie *égal*. On doit penser que deux espaces vectoriels isomorphes sont égaux du point de vue de leur structure.

[4] Le préfixe -*auto* signifie *de soi-même*. On retiendra la ritournelle AUTO = ENDO + ISO.

Proposition (critère pour être linéaire). *Soit $f : E \longrightarrow F$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est linéaire ;*
2. *on a $\forall (\lambda, a, b) \in \mathbf{K} \times E^2$, $f(\lambda a + b) = \lambda f(a) + f(b)$;*
3. *on a $\forall n \in \mathbf{N}$, $\begin{matrix} \forall (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbf{K}^n \\ \forall (a_1, ..., a_n) \in E^n \end{matrix}$, $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i)$.*

En pratique, on montre qu'une application est linéaire à l'aide du point 2 et la linéarité d'une application permettra d'utiliser le point 3.

Démonstration. (non traitée en cours)
$1 \Longrightarrow 2$ Supposons 1. Soit $(\lambda, a, b) \in \mathbf{K} \times E^2$. On a alors

$$f(\lambda a + b) = f(\lambda a) + f(b) = f(\lambda a) + f(b).$$

$2 \Longrightarrow 3$ Supposons 2. Puisque f est un morphisme de groupes additifs, f envoie le neutre de E sur celui de F, ce qui s'écrit $f(0) = 0$. On peut aussi remplacer dans l'hypothèse λ par 0 et b par 0, ce qui donne $f(0a) = 0f(a)$, *i. e.* $f(0) = 0$. La seconde égalité se montre par récurrence sur n (exercice).

$3 \Longrightarrow 1$ Supposons 3. Soit $(x, y) \in E$. Remplacer dans l'hypothèse n par 2 puis (a_1, a_2) par (x, y) donne $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Soit $(t, x) \in \mathbf{K} \times E$. Remplacer dans l'hypothèse n par 1, λ_1 par t et a_1 par x donne $f(tx) = tf(x)$.

À RETENIR

être linéaire $\Longleftrightarrow$ préserver les combinaisons linéaires

(se rappeler que le vecteur nul est la combinaison linéaire vide)

Exemples.

1. L'application nulle est linéaire.
2. Soit $b \in F$. L'application constante $\left\{ \begin{array}{ccc} E & \longmapsto & F \\ x & \longmapsto & b \end{array} \right.$ est linéaire ssi $b = 0$.
3. Soit $a \in E$. La translation $\mathrm{Id} + a$: $\left\{ \begin{array}{ccc} E & \longmapsto & E \\ x & \longmapsto & x + a \end{array} \right.$ de vecteur a est linéaire ssi $a = 0$.
4. L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^2 & \longmapsto & \mathbf{K} \\ (a, b) & \longmapsto & a + 2b \end{array} \right.$ est une forme linéaire sur $\mathbf{K}^2$.
5. L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^3 & \longmapsto & \mathbf{K} \\ (x, y, z) & \longmapsto & x - 7z \end{array} \right.$ est une forme linéaire sur $\mathbf{K}^3$.
6. L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^2 & \longmapsto & \mathbf{K}^2 \\ \binom{u}{v} & \longmapsto & \binom{2u}{u+v} \end{array} \right.$ est un endomorphisme de $\mathbf{K}^2$.
7. L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^2 & \longmapsto & \mathbf{K}^2 \\ \binom{x}{y} & \longmapsto & \binom{2x+1}{x+y} \end{array} \right.$ n'est pas linéaire car elle envoie le vecteur nul sur $(1, 0)$ (qui n'est pas le vecteur nul).
8. L'application f : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^2 & \longmapsto & \mathbf{K}^2 \\ \binom{a}{b} & \longmapsto & \binom{7a}{b^2+a} \end{array} \right.$ n'est pas linéaire puisque $f\left(2\binom{0}{1}\right) = f\binom{0}{2} = \binom{0}{4} \neq \binom{0}{2} = 2f\binom{0}{1}$.

   MNÉMO

linéaire "$\Longleftrightarrow$" degré 1

pas de degré 0 (constante) ni de degré ≥ 2 (carrés, cubes...)

1. Les applications "partie réelle" et "partie imaginaire" sont des formes linéaires sur le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$.
2. Soit $a \in \mathbf{R}^3$. L'application $x \mapsto \langle x \mid a \rangle$ est une forme linéaire sur $\mathbf{R}^3$.
3. Soit $a \in \mathbf{R}^3$. Les application $x \mapsto x \wedge a$ et $x \mapsto a \wedge x$ sont des endomorphismes de $\mathbf{R}^3$.
4. La dérivation $f \mapsto f'$ est un endomorphisme de $C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{K})$.
5. L'évaluation en 7 est une forme linéaire $f \mapsto f(7)$ sur $\mathbf{K}^{\mathbf{R}}$.

6. L'intégration $f \mapsto \int_{18}^{42} f$ sur le segment $[18, 42]$ est une forme linéaire sur $C^0(\mathbf{R}, \mathbf{K})$.
7. L'opérateur "limite" est une forme linéaire $(a_n) \mapsto \lim a_n$ sur $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$.
8. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$. L'homothétie $\lambda \operatorname{Id} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda x \end{array} \right.$ est linéaire.
9. Soit $\varphi \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$. La composition à *droite* par φ est un endormophisme $f \mapsto f \circ \varphi$ de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.
10. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Les "tapis roulants"

$$\begin{array}{c} (a_1, a_2, ..., a_n) \mapsto (a_2, a_3, ..., a_n, 0) \text{ (vers la gauche)} \\ (a_1, a_2, ..., a_n) \mapsto (0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}) \text{ (vers la droite)} \\ \text{sont des endomorphismes de } \mathbf{K}^n. \end{array}$$

Les "cycles"

$$\begin{array}{c} (a_1, a_2, ..., a_n) \mapsto (a_2, a_3, ..., a_n, a_1) \text{ (vers la gauche)} \\ (a_1, a_2, ..., a_n) \mapsto (a_n, a_1, a_2, ..., a_{n-1}) \text{ (vers la droite)} \\ \text{sont des automorphismes de } \mathbf{K}^n \text{ réciproques l'un de l'autre.} \end{array}$$

Proposition (stabilité de la linéarité par composition et inversion).

1. *Soit $f \in L(E, F)$ et $g \in L(F, G)$ où G est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Alors la composée $g \circ f$ est linéaire de E vers G.*
2. *Soit $f \in L(E, F)$ bijective. Alors f^{-1} est linéaire de F vers E.*

Démonstration.

1. Soit $(\lambda, a, b) \in E^2 \times \mathbf{K}$. On a

$$\begin{array}{rcl} g(f(\lambda a + b)) & = & g(\lambda f(a) + f(b)) \quad \text{car } f \text{ est linéaire} \\ & = & \lambda g(f(a)) + g(f(b)) \quad \text{car } g \text{ est linéaire.} \\ & & \lambda [g \circ f](a) + [g \circ f](b). \end{array}$$

2. Soit $(\lambda, a, b) \in E^2 \times \mathbf{K}$. On a les équivalences

$$\begin{array}{rl} & f^{-1}(\lambda a + b) = \lambda f^{-1}(a) + f^{-1}(b) \\ \iff & f\left(f^{-1}(\lambda a + b)\right) = f\left(\lambda f^{-1}(a) + f^{-1}(b)\right) \text{ car } f \text{ est injective} \\ \iff & (\lambda a + b) = \lambda f\left(f^{-1}(a)\right) + f\left(f^{-1}(b)\right) \quad \text{car } f \text{ est linéaire,} \\ \iff & \lambda a + b = \lambda a + b, \text{ ce qui est vrai.} \end{array}$$

Proposition (calcul dans $L(E)$).

1. *$L(E)$ est un espace vectoriel stable par composition ;*
2. *$\circ$ est distributive sur $+$;*
3. *les multiplications interne $\circ$ et externe $\cdot$ sont compatibles.*

En d'autres termes, pour tous endomorphismes f, g et h de E et pour tous scalaires λ et μ, les propriétés suivantes font sens et sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \cdot f = f \\ \lambda \cdot (\mu \cdot f) = (\lambda\mu) \cdot f \\ (\lambda + \mu) \cdot f = \lambda \cdot f + \mu \cdot f \\ \lambda \cdot (f + g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g \end{array} \right. \text{(point 1)} \quad \textit{et} \quad \left\{ \begin{array}{c} (g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f \\ h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g \end{array} \text{(point 2)} \right. \\ \quad (\lambda \cdot g) \circ f = g \circ (\lambda \cdot f) = \lambda \cdot (g \circ f) \\ \quad \textit{(noté } \lambda gf \textit{ tout court)} \quad \text{(point 3)}$$

MNEMO On peut faire du calcul avec des endomorphismes[5] comme on en fait dans $\mathbf{K}$ en remplaçant $\times$ par $\circ$ et EN FAISANT GARDE À DEUX CHOSES : ne sont plus assurées *ni la commutativité* de la multiplication *ni l'inversibilité* des éléments non nuls.

Démonstration.

[5] Il serait plus concis de dire que $L(E)$ est un anneau et un espace vectoriel dont les muliplications sont compatibles.

1. La proposition précédente appliquée au cas $G=F=E$ montre que $L(E)=L(E,E)$ est stable par composition. Montrons que $L(E)$ est un sous-espace vectoriel de E^E.

Le vecteur nul de E^E est l'application nulle $\left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & 0 \end{array}\right.$ qui est linéaire (*cf.* exemples), donc appartient à $L(E)$.

Soient $(\lambda, f, g) \in \mathbf{K} \times L\left(E^2\right)$. On a pour tout $(t, x, y) \in \mathbf{K} \times E^2$

$$\begin{aligned}
[\lambda f+g](tx+y) &= \lambda f(tx+y)+g(tx+y) \\
&= \lambda(tf(x)+f(y))+(tg(x)+g(y)) \\
&= t(\lambda f(x)+g(x))+\lambda f(y)+g(y) \\
&= t\cdot[\lambda f+g](x)+[\lambda f+g](y),
\end{aligned}$$

ce qui montre que $\lambda f+g$ est linéaire. Comme par ailleurs $\lambda f+g \in E^E$ (puisque E^E est un espace vectoriel), on a montré que $\lambda f+g \in L(E)$.

2. Soient $(f, g, h) \in L(E)^3$. Pour tout $a \in E$, on a d'une part

$$\begin{aligned}
[(g+h)\circ f](a) &= [g+h](f(a)) \\
&= g(f(a))+h(f(a)) \\
&= [g\circ f](a)+[h\circ f](a) \\
&= [g\circ f+h\circ f](a),
\end{aligned}$$

d'où l'égalité $(g+h)\circ f=g\circ f+h\circ f$, d'autre part

$$\begin{aligned}
[h\circ(f+g)](a) &= h([f+g](a)) \\
&= h(f(a)+g(a)) \\
&= h(f(a))+h(g(a)) \qquad \text{car } h \text{ est linéaire} \\
&= [h\circ f](a)+[h\circ g](a) \\
&= [h\circ f+h\circ g](a),
\end{aligned}$$

d'où l'égalité $h\circ(f+g)=h\circ f+h\circ g$.

3. Soit $(\lambda, f, g) \in \mathbf{K} \times L(E)^2$. Pour tout $a \in E$, on a

$$\begin{aligned}
[(\lambda\cdot g)\circ f](a) &= [\lambda\cdot g](f(a))=\lambda\cdot g(f(a)) \\
[\lambda\cdot(g\circ f)](a) &= \lambda\cdot([g\circ f](a))=\lambda\cdot g(f(a)) \\
[g\circ(\lambda\cdot f)](a) &= g([\lambda\cdot g](a))=g(\lambda\cdot f(a)) \underset{\text{linéaire}}{\overset{\text{car } g \text{ est}}{=}} \lambda\cdot g(f(a)),
\end{aligned}$$

d'où les égalité cherchées.

Proposition - définition (groupe linéaire). *Les inversibles de $L(E)$ (pour $\circ$) sont les automorphismes de E. Ils forment un groupe appelé* ***groupe linéaire*** *de E et noté $GL(E)$ ou $\mathcal{GL}(E)$.*

Démonstration. Les inversibles de $L(E)$ pour $\circ$ sont les éléments de $L(E)$ bijectifs, *i. e.* les endomorphismes de E bijectifs, *i. e.* les automorphismes de E. Montrons que $GL(E)$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_E$.

L'identité est une homothétie (de rapport 1), donc est linéaire, donc $GL(E)$ contient le neutre de $\mathfrak{S}_E$.

Soient f et g dans $GL(E)$. Alors d'une part f et g sont linéaires, donc (d'après une proposition précédente) leur composée $g\circ f$ reste linéaire, d'autre part f et g sont bijectifs, donc leur composée $g\circ f$ reste bijective. Ces deux faits équivalent à l'appartenance $g\circ f \in GL(E)$.

Soit $f \in GL(E)$; alors $f \in L(E,E)$ est bijectif, donc (d'après une proposition précédente) f^{-1} est linéaire de E vers E, donc (puisque f^{-1} est bijectif) $f^{-1} \in GL(E)$.

Exercice. *Soit $f \in L(E)$ tel que $f^2-18f+42\,\mathrm{Id}=0$. Montrer que $f \in GL(E)$ et exprimer f^{-1} en fonction de f.*

On réécrit l'hypothèse sous la forme $\mathrm{Id}=\frac{18f-f^2}{42}=f\frac{18-f}{42}=\frac{18-f}{42}f$, ce qui montre que $\frac{18-f}{42}$ et f sont réciproques l'un de l'autre.

2 Équations linéaires

Définition (équation linéaire). *On appelle* ***équation linéaire*** *toute équation de la forme* $f(v) = w$ *où* f *est une application linéaire d'un espace vectoriel* V *vers un espace vectoriel* W*, où* $w \in W$ *est donné et où* $v \in V$ *est l'inconnue.*

Exemples.

1. L'équation $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 5 \end{cases}$ d'inconnue $\binom{x}{y} \in \mathbf{K}^2$ est linéaire (prendre $V = W := \mathbf{K}^2$, $v := \binom{x}{y}$, $f : \binom{a}{b} \mapsto \binom{2a+b}{a-b}$ et $w := \binom{3}{5}$).
2. L'équation $y'' + y = \sin$ d'inconnue $y \in C^2(\mathbf{R}, \mathbf{K})$ est linéaire (prendre $V := C^2(\mathbf{R}, \mathbf{K})$, $W := C^0(\mathbf{R}, \mathbf{K})$, $v := y$, $f : z \mapsto z'' + z$ et $w := \sin$).
3. L'équation $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n - u_{n+18} = 0$ d'inconnue $(u_k) \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ est linéaire (prendre $V := \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, $W := \{0\}$, $v := (u_n)$, $f : (a_n) \mapsto (a_n - a_{n+18})$ et $w := (0)$).

Comme nous l'avons vu pour les équations différentielles linéaires, la résolution des équations linéaires va passer d'une part par la résolution de l'équation sans second membre associée, d'autre part par la recherche d'*une* solution. Le premier point motive la définition suivante.

Définition (noyau d'une application linéaire). *Soit* $f \in L(E, F)$*. On appelle* ***noyau***[6] *de* f *l'ensemble des vecteurs de* E *annulés par* f*. On le note*

$$\operatorname{Ker} f := \{a \in E \ ; \ f(a) = 0\}.$$

Exemples.
Dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$, le noyau de "partie réelle" est le sous-espace vectoriel $i\mathbf{R}$.
Dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$, le noyau de "partie imaginaire" est le sous-espace vectoriel $\mathbf{R}$.
Dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$, le noyau de la forme linéaire $(a, b) \mapsto a - b$ est la première bissectrice $\mathbf{R}(1 + i)$.
Le noyau de la dérivation est formé des fonctions constantes.
Le noyau de l'application $(a_n) \mapsto (a_{n+1} - a_n)$ est le sous-espace vectoriel des suites constantes.

Propriétés (noyau, image et sous-espace vectoriels). *Soit* $f : E \longrightarrow F$*. Le noyau et l'image de* f *sont des sous-espaces vectoriels de* E*.*

Démonstration. Puisque $f(0_E) = 0_F$, on a les appartenances $0_E \in \operatorname{Ker} f$ et $0_F \in \operatorname{Im} f$.
Soit $(\lambda, a, b) \in \mathbf{K} \times (\operatorname{Ker} f)^2$. On a alors $f(\lambda a + b) = \lambda f(a) + f(b) = \lambda 0 + 0 = 0$, d'où $\lambda a + b \in \operatorname{Ker} f$.
Soit $(\lambda, \alpha, \beta) \in \mathbf{K} \times (\operatorname{Im} f)^2$. Soit $(a, b) \in E^2$ tel que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$. On a alors $\lambda\alpha + \beta = \lambda f(a) + f(b) = f(\lambda a + b) \in \operatorname{Im} f$.

Propriété (critère d'injectivité des applications linéaires) (doit devenir quasiment une définition). *Une application linéaire est injective ssi son noyau est nul.*

Démonstration. Soit $f : E \longrightarrow F$ linéaire. Puisque $0 \in \operatorname{Ker} f$, on a toujours l'inclusions $\{0\} \subset \operatorname{Ker} f$, d'où l'on tire l'équivalence $\operatorname{Ker} f = \{0\} \iff \operatorname{Ker} f \subset \{0\}$. Montrons alors que f est injective ssi $\operatorname{Ker} f \subset \{0\}$.
$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons f injective. Soit $a \in \operatorname{Ker} f$. Alors $f(a) = 0 = f(0)$, d'où (par injectivité) $a = 0$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\operatorname{Ker} f \subset \{0\}$. Soient a et b dans E tels que $f(a) = f(b)$. On a alors $f(a - b) = f(a) - f(b) = 0$, ce qui montre que $a - b \in \operatorname{Ker} f$, d'où (d'après l'hypothèse) $a - b \in \{0\}$, *i. e.* $a = b$.

Théorème (sous-espace affine des solutions d'une équation linéaire). *Soient* $f \in L(E, F)$ *et* $y \in F$*. Si l'équation linéaire* $f(x) = y$ *d'inconnue* $x \in E$ *admet une solution, appelons-en une* x_0*, alors son*

[6] Le terme *noyau* apparaît sous la plum d'Ivar Fredholm en 1903 dans l'article *Sur une classe des équations fonctionnelles* (sans rapport alors avec son acception vectorielle), David Hilbert le germanise l'an d'après en *kern* puis Maxime Bôcher l'anglicise en 1909 en *kernel* (d'où la notation $\operatorname{Ker} f$). Ce n'est que bien plus tard dans les années 1940 que ce terme prend avec Pontrjagin son sens algébrique en théorie des groupes puis (dans les années 1960) que George Birkhoff et Saunders MacLane appliquent ce sens algébrique en algèbre linéaire.

*ensemble de solutions est $x_0 + \operatorname{Ker} f$ (c'est le translaté du sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker} f$ selon le vecteur x_0, on dit que c'est un **sous-espace affine** de E).*

Démonstration. Soit $a \in E$. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
& a \text{ est solution de l'équation proposée} \\
\iff & f(a) = y \\
\iff & f(a) = f(x_0) \\
\iff & f(a) - f(x_0) = 0 \\
\iff & f(a - x_0) = 0 \\
\iff & a - x_0 \in \operatorname{Ker} f \\
\iff & a \in x_0 + \operatorname{Ker} f.
\end{aligned}$$

3 Exemples usuels

Définition (projecteur, symétrie). *Soient A et B deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On appelle **projection** (ou **projecteur**) sur A parallèlement à B l'endomorphisme* [dessin]

$$\left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \begin{array}{c}\text{l'unique } a \in A \text{ tel que} \\ \exists b \in B,\ x = a + b\end{array}\end{array}\right.$$

*On appelle **symétrie** par rapport à A parallèlement à B l'endomorphisme* [dessin]

$$\left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \begin{array}{c}a - b \text{ où } a \in A \text{ et } b \in B \\ \text{sont tels que } x = a + b\end{array}\end{array}\right. .$$

Propriétés. *Soient A et B deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.*

1. *Notons p la projection sur A parallèlement à B. Alors $p^2 = p$, $A = \operatorname{Im} p$ et $B = \operatorname{Ker} p$.* [dessin]
2. *Notons s la symétrie par rapport à A parallèlement à B. Alors $s^2 = \operatorname{Id}$, $A = \operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id})$ et $B = \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id})$.* [dessin]

Remarque. Tout se lit sur un dessin. On observera en particulier :

- l'espace $\operatorname{Im} p$ sur lequel on projette est l'ensemble $\{x \in E \ ; \ p(x) = x\}$ des points fixés par p ;
- l'espace $\operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id})$ par rapport auquel on symétrise est l'ensemble $\{x \in E \ ; \ s(x) = x\}$ des points fixés par s ;
- l'espace $\operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id})$ parallèlement auquel on symétrise est l'ensemble $\{x \in E \ ; \ s(x) = -x\}$ des points "anti-fixés" par s.

Démonstration.

1. Soit $x \in E$. Soit $(a, b) \in A \times B$ tel que $x = a + b$. Alors $p^2(x) = p(p(x)) = p(a) = a = p(x)$. On en déduit l'égalité $p^2 = p$.

   La définition de p montre l'inclusion $\operatorname{Im} p \subset A$. Soit réciproquement $a \in A$: on a $a = p(a) \in \operatorname{Im} p$, d'où l'inclusion $A \subset \operatorname{Im} p$. On en déduit l'égalité $A = \operatorname{Im} p$.

   Soit $x \in E$. Soit $(a, b) \in A \times B$ tel que $x = a + b$. On a alors les équivalences

$$x \in \operatorname{Ker} p \iff p(x) = 0 \iff a = 0 \iff x = b \overset{?}{\iff} x \in B,$$

   la dernière équivalence venant de l'unicité d'une décomposition de x selon $A + B$.

2. Soit $x \in E$. Soit $(a,b) \in A \times B$ tel que $x = a + b$. On a alors d'une part les égalités

$$s^2(x) = s(s(x)) = s(a-b) = s\left(\underbrace{a}_{\in A} + \underbrace{(-b)}_{\in B}\right) = a - (-b) = a + b = x = \mathrm{Id}(x),$$

d'où l'on déduit l'égalité $s^2 = \mathrm{Id}$, d'autre part les équivalences

$$x \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) \iff s(x) = x \iff a - b = a + b \underset{\text{en somme directe}}{\overset{\text{car } A \text{ et } B \text{ sont}}{\iff}} \begin{cases} a = a \\ b = -b \end{cases} \iff b = 0 \iff x = a \iff x \in A \text{ et}$$

$$x \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}) \iff s(x) = -x \iff a - b = -a - b \underset{\text{en somme directe}}{\overset{\text{car } A \text{ et } B \text{ sont}}{\iff}} \begin{cases} a = -a \\ -b = -b \end{cases} \iff a = 0 \iff x = b \iff x \in B,$$

d'où l'on déduit les égalités $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) = A$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}) = B$.

La proposition précédente admet une réciproque.

Théorème (caractérisation des projecteurs et des symétries).

1. Soit $p \in L(E)$. Alors p est un projecteur ssi[7] $p^2 = p$ et, dans ce cas, p est la projection sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$.
2. Soit $s \in L(E)$. Alors s est une symétrie ssi[8] $s^2 = \mathrm{Id}$ et, dans ce cas, s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + id)$.

Démonstration. Les sens directs $\boxed{\Longrightarrow}$ font l'objet de la proposition précédente. Tous les éléments de la démonstration se retrouvent sur les deux dessins précédents !

1. Supposons $p^2 = p$.

(a) Montrons que $\mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, p$ sont supplémentaires.

Montrons que $E = \mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Im}\, p$. Il suffit de montrer l'inclusion $\subset$. Soit $x \in E$. Puisque $p^2(x) = p(x)$, on a $p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = 0$, d'où la décomposition

$$x = \underbrace{x - p(x)}_{\in \mathrm{Ker}\, p} + \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}\, p}.$$

Montrons que $\mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, p$ sont en somme directe. Soit $y \in \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Im}\, p$. Soit $x \in E$ tel que $y = p(x)$. On a alors

$$y = p(x) = p^2(x) = p(p(x)) = p(y) = 0, \text{ c. q. f. d..}$$

(b) D'après l'écriture $x = (x - p(x)) + p(x)$ ci-dessus, l'application $x \mapsto p(x)$ est la projection sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$, *c. q. f. d.*.

2. Supposons $s^2 = \mathrm{Id}$.

(a) Montrons déjà que $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$ sont supplémentaires.

Montrons que $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) + \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$. Il suffit de montrer l'inclusion $\subset$. Soit $x \in E$. Puisque $s^2(x) = x$, on a d'une part $s(x + s(x)) = s(x) + x = x + s(x)$, d'autre part $s(x - s(x)) = s(x) - x = -(x - s(x))$, d'où la décomposition

$$x = \underbrace{\frac{x + s(x)}{2}}_{\text{fixé par } s} + \underbrace{\frac{x - s(x)}{2}}_{\text{"anti-fixé" par } s} \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) + \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}).$$

Montrons que $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$ sont en somme directe. Soit $x \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$. On a alors $x = s(x) = -x$, d'où $x = 0$, *c. q. f. d.*.

(b) D'après l'écriture $x = \frac{x+s(x)}{2} + \frac{x-s(x)}{2}$ ci-dessus, l'application $x \mapsto \frac{x+s(x)}{2} - \frac{x-s(x)}{2} = s(x)$ est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + id)$, *c. q. f. d.*.

---

[7] on dit alors que p est ***idempotent*** (car toutes ses puissances sont égales)

[8] on dit alors que s est ***involutive*** (car la suite de ses puissances n'évolue pas : $s, \mathrm{Id}, s, \mathrm{Id}, s, \mathrm{Id} \ldots$)

Exemples (*cf.* T. G.).

L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{K^3} & \longrightarrow & \mathbf{K^3} \\ (a,b,c) & \longmapsto & (0,a+b+c,0) \end{array}\right.$ est un projecteur de noyau le plan d'équation $x+y+z=0$ et d'image la droite dirigée par le vecteur $(0,1,0)$.

L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{K^K} & \longrightarrow & \mathbf{K^K} \\ f & \longmapsto & f\circ(-\operatorname{Id}) \end{array}\right.$ est une symétrie et que les espaces $\operatorname{Ker}(s-\operatorname{Id}_{\mathbf{K^K}})$ et $\operatorname{Ker}(s+\operatorname{Id}_{\mathbf{K^K}})$ sont constitués des fonctions resp. paires et impaires.