Suites
(résumé)

$\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.
Pour montrer l'existence d'une suite $a_{n+1} = f(a_n)$, on trouve une partie contenant a_0 et stable par f.

Montrer une convergence (dans K).
Pour montrer $a_n \longrightarrow \lambda$, on majore $|a_n - \lambda|$ par un truc qui $\longrightarrow 0$.
Pour majorer, on peut utiliser l'inégalité triangulaire $|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$ (plusieurs fois).
Suites usuelles tendant vers 0 : $\frac{1}{n^{\alpha>0}} \longrightarrow 0 \qquad \frac{1}{(\ln n)^{\alpha>0}} \longrightarrow 0 \qquad \frac{1}{e^n} \longrightarrow 0 \qquad \frac{1}{n!} \longrightarrow 0$.
Très utile : $\underbrace{o_n}_{\longrightarrow 0} \underbrace{B_n}_{\text{bornée}} \longrightarrow 0$.
Les suites tendant vers 0 sont stables par $+$, par $\times$ et par $\cdot$: $\underbrace{\lambda}_{\text{scalaire}} \underbrace{a_n}_{\longrightarrow 0} + \underbrace{b_n}_{\longrightarrow 0} \underbrace{c_n}_{\longrightarrow 0} \longrightarrow 0$.

Propriétés des limites (dans K ou dans $\overline{\mathbf{R}}$) (a_n) converge $\Longrightarrow$ (a_n) bornée.

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{c} a_n \longrightarrow \alpha \\ b_n \longrightarrow \beta \end{array} \right., \text{ alors } \left\{ \begin{array}{c} a_n + b_n \longrightarrow \alpha + \beta \\ a_n b_n \longrightarrow \alpha\beta \\ \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{\alpha}{\beta} \text{ (si } \beta \neq 0) \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{c} f(a_n) \longrightarrow f(\alpha) \text{ si} \\ f \text{ continue en } \alpha \end{array} \right. .$$

$(a_n) \longrightarrow \underbrace{\lambda}_{\neq 0} \implies [|a_n| > 0$ à partir d'un certain rang].
Si $a_n \longrightarrow \lambda$, alors toutes les sous-suites $a_{\varphi(n)} \longrightarrow \lambda$ aussi.
Suite géométrique : (λ^n) converge ssi $|\lambda| < 1$ ou si $\lambda = 1$.

Limites et ordre (dans R). Bornée $\Longleftrightarrow$ majorée & minorée. (a_n) croît ssi $a_{n+1} \geq a_n$.
Comparaison : $\underbrace{a_n}_{\longrightarrow \alpha} \leq \underbrace{b_n}_{\longrightarrow \beta} \Longrightarrow \alpha \leq \beta$.
Encadrement : $\underbrace{a_n}_{\longrightarrow \lambda} \leq u_n \leq \underbrace{A_n}_{\longrightarrow \lambda} \Longrightarrow u_n \longrightarrow \lambda$.
Convergence monotone : (a_n) croît $\Longrightarrow a_n \longrightarrow \sup_{k \in \mathbf{N}} a_k$.

Suites adjacentes. Définition : $\overbrace{\underbrace{a_n}_{\text{croît}} \leq \underbrace{b_n}_{\text{décroît}}}^{b_n - a_n \longrightarrow 0}$. Conclusion : $\exists \lambda, \left\{ \begin{array}{c} a_n \longrightarrow \lambda \\ b_n \longrightarrow \lambda \end{array} \right.$.

Divergence vers ∞ (dans R). $a_n \longrightarrow \infty \Longleftrightarrow \frac{1}{a_n} \longrightarrow 0^+$.
Suites usuelles tendant vers ∞ : $(\ln n)^{\alpha>0} \longrightarrow \infty \qquad n^{\alpha>0} \longrightarrow \infty \qquad e^n \longrightarrow \infty \qquad n! \longrightarrow \infty$.
$a_n \geq \underbrace{A_n}_{\longrightarrow \infty} \Longrightarrow a_n \longrightarrow \infty \qquad \underbrace{A_n}_{\longrightarrow \infty} + \underbrace{m_n}_{\text{minorée}} \longrightarrow \infty \qquad \underbrace{A_n}_{\longrightarrow \infty} \underbrace{m_n}_{\substack{\text{minorée} \\ \text{par un } m>0}} \longrightarrow \infty$.
Pour minorer, on peut utiliser l'inégalité triangulaire $|a \pm b| \geq |a| - |b|$.
Les suites tendant vers ∞ sont stables par $+$, par $\times$ et par homothéties de rapport > 0.